

Теория вероятностей и математическая статистика
Многомерные случайные величины.

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

Введение

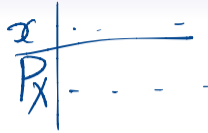
Возвращение в дискретный мир

- Точно так же, как мы можем наблюдать результат одновременного подбрасывания двух монет, мы можем наблюдать результат более чем одной случайной величины одновременно.
- Для описания этого эксперимента мы используем новое понятие - многомерная случайная величина или случайный вектор:

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n), \text{ или в двумерном случае } (X, Y).$$

- Сравните это с элементарным исходом вида $\omega = (\text{состояние}_1, \dots, \text{состояние}_n)$, как например для одновременного или последовательного подбрасывания монет
- Теперь уникальным **элементарным исходом** будет набор одновременно наблюдаемых значений случайных величин. Например $(x, y) = (10, 2)$, где X - число на кубике с 20 гранями, Y - число на кубике с 6 гранями, бросили их вместе и наблюдаем вместе как единую целую картину.

Совместная функция вероятности



- Нас интересует взаимное поведение этих случайных величин.
- Связаны ли они? Сопровождается ли некоторое значение одной величины более часто некоторым другим значением второй величины? Можем ли мы извлекать больше информации о происходящих случайных экспериментах, когда мы учитываем взаимодействие случайных величин друг с другом?
- Для описания этого взаимодействия, или взаимного поведения, мы используем **совместную функцию вероятности**, т.е.:

	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$X = 2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

Совместная функция вероятности

- В общем виде:

	$Y = y_1$...	$Y = y_m$
$X = x_1$	$P(\{X = x_1, Y = y_1\})$...	$P(\{X = x_1, Y = y_m\})$
...
$X = x_n$	$P(\{X = x_n, Y = y_1\})$...	$P(\{X = x_n, Y = y_m\})$

- Мы также можем записать $P(\{X = x_i, Y = y_j\})$ как $P_{X,Y}(x_i, y_j)$

Свойства

- $P_{X,Y}(x_i, y_j) \geq 0$, для всех возможных (x_i, y_j)
- Поскольку $P(\Omega) = 1$, здесь мы имеем $\Omega_{x,y} = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_n, y_m)\}$. Из этого следует:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = 1.$$

Маргинальная функция вероятности

- От англ. marginal. В более старых переводах - частная функция вероятности, частное распределение
- Предположим, нас интересует получение результата $X = x_i$, независимо от того, чему равно Y . Это означает, что все следующие пары являются допустимыми, и они образуют специальное событие:

$$A = \{\text{мы получаем } X = x_i\} = \{(x_i, y_1), (x_i, y_2), \dots, (x_i, y_m)\}$$

- Если затем мы хотим найти вероятность этого события, то по свойству аддитивности:

$$P(\{X = x_i\}) = P_{X,Y}(x_i, y_1) + P_{X,Y}(x_i, y_2) + \dots + P_{X,Y}(x_i, y_m),$$

т.е. мы складываем вероятности всех элементарных исходов, формирующих это событие.

- Это означает, что используя совместную функцию вероятности, мы можем восстановить собственную функцию вероятности случайной величины, как бы изолируя её отдельно от случайного вектора.
- Раньше мы называли это просто **функцией вероятности**, но теперь нам нужно уточнять, потому что добавляется много новых видов функций вероятности.

Маргинальная функция вероятности

- В общем виде:

$$P(\{X = x_i\}) = \sum_{j=1}^m P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = \sum_{j=1}^m P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$$P(\{Y = y_j\}) = \sum_{i=1}^n P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = \sum_{i=1}^n P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

- Другими словами, маргинальные вероятности являются суммами по соответствующей строке или столбцу в таблице совместного распределения:

		$Y = y_1$...	$Y = y_m$
$P(X=x_1)$	$X = x_1$	$P(\{X = x_1, Y = y_1\})$...	$P(\{X = x_1, Y = y_m\})$

	$X = x_n$	$P(\{X = x_n, Y = y_1\})$...	$P(\{X = x_n, Y = y_m\})$

$P(Y=y_1)$

Условная функция вероятности

- В многомерном мире мы также можем исследовать вопросы следующего вида: $P(X = x_i | Y = y_j)$
- Мы называем это еще одной функцией вероятности - **условной функцией вероятности**
- Напомним: условная вероятность - это своего рода параметризованная функция, где событие-условие служит параметром. Функции $P(X|A)$ и $P(X|B)$, $A \neq B$, являются разными функциями!
- Применяя определение условной вероятности:

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}{P(Y = y_j)} = \frac{P(\{X = x_i, Y = y_j\})}{P(Y = y_j)}$$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}{P(X = x_i)} = \frac{P(\{X = x_i, Y = y_j\})}{P(X = x_i)}$$

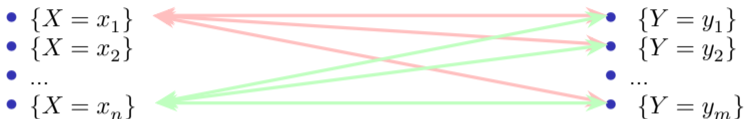
Независимость

- Наконец, есть важный разговор о независимости случайных величин. В некотором смысле это даже более важно, чем независимость отдельных событий.
- Напомним. Независимость пары событий:

$$P(A) = P(A|B), \quad P(B) = P(B|A)$$
$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Независимость

• Рассмотрим каждую возможную пару следующих событий:



$$\{(x_i, y_j), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$$

i Definition

Если каждая пара оказывается независимыми событиями, то мы говорим, что случайные величины X и Y независимы.

$$\forall x_i, \forall y_j : P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(\{X = x_i, Y = y_j\}).$$

Задачи

Совместная функция вероятности X и Y задана следующим образом:

	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$X = 2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

1. Найдите маргинальные функции вероятности для каждой случайной величины.
2. Вычислите условную функцию вероятности X при условии $Y = i, i = 1, 2$.
3. Независимы ли X и Y ?

X	1	2
P_X	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$

Y	1	2
P_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

↑

X	1	2
$P(\cdot Y=1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Решение задачи

1. Маргинальные функции вероятности

Для X :

$$P(X = 1) = \sum_{j=1}^2 P(X = 1, Y = j) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = \sum_{j=1}^2 P(X = 2, Y = j) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

$x \backslash$	1	2
P_X	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

Для Y :

$$P(Y = 1) = \sum_{i=1}^2 P(X = i, Y = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 2) = \sum_{i=1}^2 P(X = i, Y = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$y \backslash$	1	2
P_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Решение задачи (продолжение)

2. Условные функции вероятности

$P(X|Y = 1)$:

$$P(X = 1|Y = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2|Y = 1) = \frac{P(X = 2, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

x	1	2
$P(x Y=1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$P(X|Y = 2)$:

$$P(X = 1|Y = 2) = \frac{P(X = 1, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 2|Y = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Решение задачи (продолжение)

3. Проверка независимости

Проверим условие независимости для пары:

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{8} \quad \text{и} \quad P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32} \neq \frac{1}{8} = \frac{4}{32}$$

Вывод: X и Y не независимы.

Функции от случайных векторов

- Мы обсуждали идею, что функция от случайной величины сама является случайной величиной, т.е. $W = g(X)$.
- Функция может быть от более чем одной переменной, и теперь мы можем получить $W = f(X, Y)$.
- Как и в случае с одной переменной, мы можем захотеть предсказать $E[W] = E[f(X, Y)]$.
- Напомним:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) P(X = x_i)$$

- В новом случае:

$$E[g(X, Y)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$X+Y=W, \Omega_w, \mathcal{F}_w, P_w$$

Пример

Совместная функция вероятности X и Y задана следующим образом:

	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$X = 2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

Рассмотрим функции $W = XY$, $G = X - Y$. Найдите их функции вероятности и математические ожидания.

w	1	2	4
P_W	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$

Пример

Найти математическое ожидание $E[XY]$

Вариант 1: Через распределение новой случайной величины

Сначала найдем распределение $W = XY$:

- $W = 1$: когда $(X = 1, Y = 1)$, $P(W = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{8}$
- $W = 2$: когда $(X = 1, Y = 2)$ или $(X = 2, Y = 1)$, $P(W = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $W = 4$: когда $(X = 2, Y = 2)$, $P(W = 4) = P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{2}$
- Теперь вычислим математическое ожидание:

$$E[XY] = E[W] = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{6}{8} + \frac{4}{2} = \frac{23}{8}$$

Пример

$$W = X \cdot Y$$

Вариант 2: Используя формулу непосредственного подсчета

$$E[XY] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{4}{2} \\ &= \frac{23}{8} \end{aligned}$$

Ответ: $E[XY] = \frac{23}{8} = 2.875$