

**Теория вероятностей и математическая статистика**  
**Характеристики случайных величин. Биномиальное распределение.**

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

## Свойства математического ожидания

1. **Линейность:** Для любых констант  $a$  и  $b$ :

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

2. **Константа:** Если  $c$  - константа, то:

$$E[c] = c$$

Handwritten diagram illustrating the expectation of a constant  $c$ . It shows a circle with '0' inside, 'c' below it, and an arrow pointing to a table with 'x' and 'c' in the top row, and 'P\_X' and '1' in the bottom row.

3. **Ожидание функции:** Для функции  $Y = g(X)$ :

$$E[g(X)] = \sum_{x \in \Omega_X} g(x)P(X = x)$$

$$E[X] = \sum x \cdot P(X=x)$$

**Доказательство:**

$$E(Y) = \sum_{y \in \Omega_Y} (y P(Y = y)) =$$

$$= \sum_{y \in \Omega_Y} \left( y \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x) \right) = \sum_{x \in \Omega_X} g(x)P(X = x)$$

## Математическое ожидание

### Пример

Посмотрим на примеры вычисления математического ожидания на основе уже посчитанной ранее задачи.

Пусть распределение случайной величины задано таблицей

$x$	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

Постройте распределение (функцию вероятности) случайной величины  $Y = X^2 + 10$ .

Наша задача: восстановить новое пространство элементарных исходов  $\Omega_Y$  для величины  $Y$  и выразить новую функцию вероятности  $P_Y(y)$  через старую известную  $P_X(x)$ .

## Математическое ожидание

### Пример

$x$	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

$y$	10	11	14	19
$p_Y(y)$	0.1	0.3	0.3	0.3

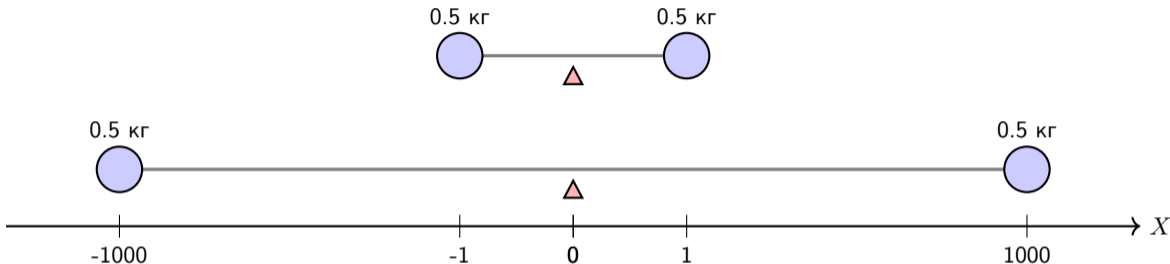
- $E[X] = \sum_{i=1}^6 x_i P_X(X = x_i) = -0.1 - 0.2 + 0.2 + 0.4 + 0.9 = 1.2$
- Первый подход к вычислению  $E[Y]$  - по определению, зная таблицу функции вероятности для  $Y$ :

$$E[Y] = \sum_{i=1}^4 y_i P_Y(Y = y_i) = 10 \cdot 0.1 + 11 \cdot 0.3 + 14 \cdot 0.3 + 19 \cdot 0.3 = 14.2$$

- Второй подход к вычислению  $E[Y]$  - по свойству **3** с предыдущего слайда. Главная идея: мы можем миновать шаг построения таблицы вероятности для  $Y$  и сразу предсказать, каким будет  $E[Y]$ , по таблице вероятностей для  $X$  и зная вид функции  $Y = g(X)$ , в нашем примере  $Y = X^2 + 10$ :

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{i=1}^6 g(x_i) P_X(X = x_i) = \sum_{i=1}^6 (x_i^2 + 10) P_X(X = x_i) = \\ &= 10 \cdot 0.1 + 11 \cdot 0.1 + 14 \cdot 0.1 + 11 \cdot 0.2 + 14 \cdot 0.2 + 19 \cdot 0.3 = 14.2 \end{aligned}$$

## Физическое Лирическое отступление 2



- В вероятностном мире интерпретация картинки такая, что может быть две случайные величины с одинаковым математическим ожиданием, но с кардинально разными значениями.
- Представьте, что в одном случае вы кидаете монетку с привязанными численными значениями  $+1$  и  $-1$  (например, выигрыш - проигрыш), а в другом ту же монетку, но с привязанными значениями уже  $+1000$  и  $-1000$ . Математическое ожидание в обоих случаях будет 0, но сравните магнитуды возможных значений!
- Это помогает нам понять мотивацию введения новой характеристики для случайной величины - **дисперсии** - которая сможет охарактеризовать степень разброса значений случайной величины.

## Характеристики случайной величины

### Дисперсия

- Дисперсия случайной величины - это число, **константа**, которое помогает нам понять степень разброса потенциальных значений случайной величины относительно среднего.

#### i Definition

Для случайной величины  $X$  её дисперсия обозначается  $Var[X]$  (Variance) и определяется как:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

$x$	-1	1
$P_X$	$1/2$	$1/2$

$t$	-1	1
$P_T$	$1/2$	$1/2$

$T = (X - E[X])$

$x$	1	2	3	4
$P_X$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

$E[X] = 2.5$

$t$	-1.5	-0.5	0.5	1.5
$P_T$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

## Характеристики случайной величины

### Дисперсия

- Дисперсия случайной величины - это число, **константа**, которое помогает нам понять степень разброса потенциальных значений случайной величины относительно среднего.

#### i Definition

Для случайной величины  $X$  её дисперсия обозначается  $Var[X]$  (Variance) и определяется как:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

$$T = (X - E[X])$$

$x$	1	2	3	4
$P_X$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E[X] = 2.5$$

$t$	-1.5	-0.5	0.5	1.5
$P_T$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$W = |T|$$

$w$	0.5	1.5
$P_W$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E[W] = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$P_W(w=0.5) = P_T(-0.5) + P_T(0.5)$$

## Характеристики случайной величины

### Дисперсия

- Дисперсия случайной величины - это число, **константа**, которое помогает нам понять степень разброса потенциальных значений случайной величины относительно среднего.

#### i Definition

Для случайной величины  $X$  её дисперсия обозначается  $Var[X]$  (Variance) и определяется как:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

$$T = (X - E[X])$$

$x$	1	2	3	4
$P_X$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E[X] = 2.5$$

$t$	-1.5	-0.5	0.5	1.5
$P_T$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E[Y] = \frac{1}{8} + \frac{9}{8} = \frac{10}{8}$$

$y$	0.25	2.25
$P_Y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$Y = T^2$$

$$P(Y=0.25) = P_X(X=-\frac{1}{2}) + P_X(X=\frac{1}{2})$$

# Характеристики случайной величины

## Дисперсия

- Дисперсия случайной величины - это число, **константа**, которое помогает нам понять степень разброса потенциальных значений случайной величины относительно среднего.

### i Definition

Для случайной величины  $X$  её дисперсия обозначается  $Var[X]$  (Variance) и определяется как:

$$Var[X] = E [(X - E[X])^2]$$

- Формально говоря, дисперсия это математическое ожидание новой случайной величины:

$$Y = g(X) = (X - E[X])^2,$$

описывающей квадрат расстояния между значением случайной величины  $X$  и её математическим ожиданием.

- Также вводится понятие стандартного отклонения (standard deviation, std) величины  $X$ , которое является квадратным корнем из дисперсии:  $std[X] = \sqrt{Var[X]}$ .

# Характеристики случайной величины

## Дисперсия

### Вычисление дисперсии

Существует упрощенная формула:

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])^2] &= E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] = \\ &= E[X^2] - E[2E[X]X] + E[(E[X])^2] = E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 = \\ &= \boxed{E[X^2] - (E[X])^2} \end{aligned}$$

В процессе мы используем свойство линейности математического ожидания, а также знание того, что  $E[X]$  - это константа, при этом  $E[c] = c$ , то есть  $E[E[X]] = E[X]$ .

# Дисперсия

## Свойства

1. **Неотрицательность:** Для любой случайной величины  $X$ :

$$\text{Var}[X] \geq 0$$

2. **Дисперсия константы:** Если  $c$  - константа, то:

$$\text{Var}[c] = 0$$

3. **Масштабирование:** Для любой константы  $c$ :

$$\text{Var}[cX] = c^2 \text{Var}[X]$$



## Дисперсия

### Пример из двух частей: часть 1

Посчитаем дисперсию на примере нашей задачи. Считаем уже известным, что  $E[X] = 1.2$ .

$x$	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

- Нам нужно вычислить  $E[Y]$ , где  $Y = (X - E[X])^2$ . Сразу воспользуемся подходом, позволяющим миновать шаг построения таблицы вероятности для  $Y$ :

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{i=1}^6 g(x_i) P_X(X = x_i) = \sum_{i=1}^6 (x_i - 1.2)^2 P_X(X = x_i) = \\ &= 1.44 \cdot 0.1 + 4.84 \cdot 0.1 + 10.24 \cdot 0.1 + 0.04 \cdot 0.2 + 0.64 \cdot 0.2 + 3.24 \cdot 0.3 = 2.76 \end{aligned}$$

- Но для дисперсии у нас есть ещё более умный подход, описанный на одном из слайдов выше:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = 4.2 - (1.2)^2 = 2.76 \\ E[X^2] &= \sum_{i=1}^6 (x_i)^2 P_X(X = x_i) = 0.1 + 4 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.3 = 4.2 \end{aligned}$$

- Voilà!

$$E[X^2], \quad T = X^2, \quad E[T]$$

## Дисперсия

### Пример из двух частей: часть 2

Предположим, у нас есть другая случайная величина  $W$  и ее функция вероятности задана:

$w$	-6	0	1	15
$p_W(x)$	0.1	0.5	0.3	0.1

- Посчитаем математическое ожидание:

$$E[W] = -6 \cdot 0.1 + 0 + 1 \cdot 0.3 + 15 \cdot 0.1 = 1.2 = E[X] \text{ из предыдущего примера}$$

- Посчитаем дисперсию для  $W$ :

$$Var[W] = E[W^2] - (E[W])^2 = 26.4 - (1.2)^2 = 24.96$$

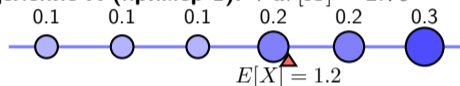
$$E[W^2] = \sum_{i=1}^4 (w_i)^2 \cdot P_W(W = w_i) = 36 \cdot 0.1 + 0 + 1 \cdot 0.3 + 225 \cdot 0.1 = 26.4$$

# Дисперсия

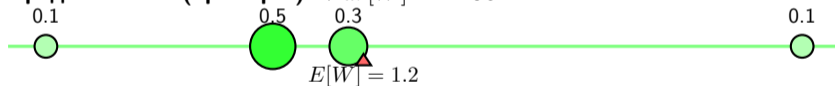
## Снова о физической интерпретации

Дисперсия показывает, насколько “разбросаны” значения относительно среднего. Представим случайные величины как массы на стержне:

**Распределение X (пример 1):**  $Var[X] = 2.76$



**Распределение W (пример 2):**  $Var[W] = 24.96$



Масштаб не соблюден - для наглядности

