Теория вероятностей и математическая статистика

Полная вероятность. Теорема Байеса.

Глеб Карпов

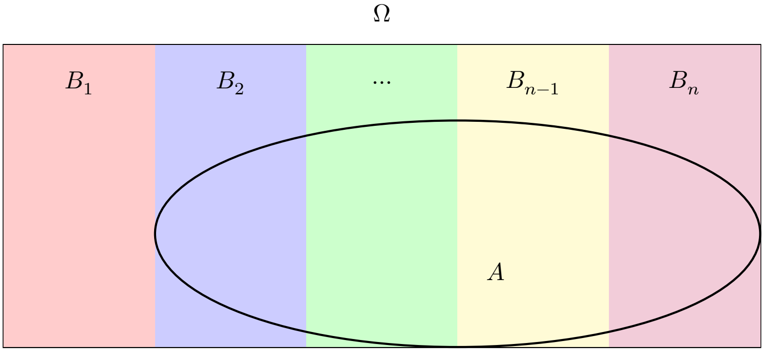
ФКН ВШЭ

Полная вероятность

- Концепция условной вероятности неразрывно связана со следующей, концепцией полной вероятности.

$$B_i \cap B_j = \varnothing \quad i \neq j$$

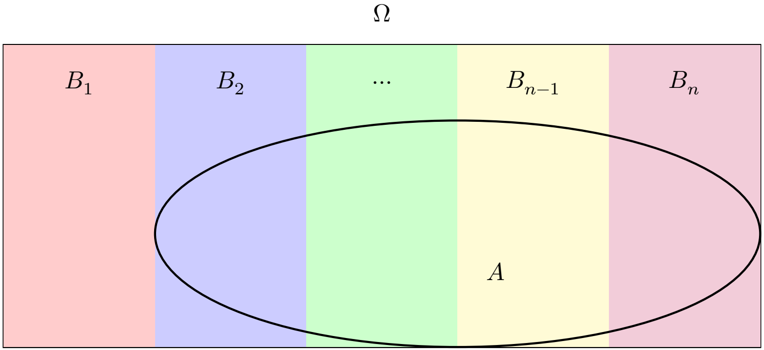
$$\bigcup B_i = \Omega$$



Полная вероятность

$$P(A|B_i) = \frac{P(A\cap B_i)}{P(B_i)}$$

- Концепция условной вероятности неразрывно связана со следующей, концепцией полной вероятности.
- Рассмотрим зафиксированное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Назовем **разбиением** Ω коллекцию событий $\{B_k,\ k \in I\}$, таких что $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup B_i = \Omega$.
- Вдобавок, рассмотрим какое-то другое событие A, которое пересекается с какими-то событиями из разбиения, но не обязано пересекаться со всеми.



$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A\cap B_i)$$

$$P(A) = \sum P(A\cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\cdot P(B_i)$$

Полная вероятность

Theorem

Если $\{B_1, B_2, ...\}$ - разбиение Ω, с $P(B_i) > 0 \ \forall i$, то:

$$\boxed{P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i), \ \forall A \in \mathcal{F}}$$

Доказательство. Заметим, что мы можем реконструировать событие A из его частичек-пересечений со всеми B_i: $A = \bigcup_i (A \cap B_i)$. Эти кусочки $\{A \cap B_i\}$ попарно не пересекаются, как и оригинальные элементы разбиения. Поэтому далее можем применить свойство аддитивности вероятности:

$$P(A) = P\left(\bigcup_i (A \cap B_i)\right)$$
$$= \sum_i P\left(A \cap B_i\right) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

Теорема Байеса

Theorem

Пусть $\{B_1, B_2, \dots\}$ - разбиение Ω, с $P(B_i) > 0\ \forall i$. Тогда для любого события A, $P(A) > 0$, справедливо:

$$\boxed{P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum\limits_i P(A|B_i)P(B_i)}}$$

Доказательство.
Опираемся на то, что $P(X \cap Y)$ может быть выражена через разные условные вероятности:

$$P(X \cap Y) = P(X|Y)P(Y) = P(Y|X)P(X).$$

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y) \cdot P(Y)}{P(X)}$$

Применим это к условию

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)},$$

где $P(A) = \sum\limits_i P(A|B_i)P(B_i)$ как полная вероятность.

Пример 1

Вероятность победы лошади в скачках равна 0.3, если погода сухая, и 0.5 если идет дождь. Прогноз погоды дает вероятность дождя 40%.

1. Найдите вероятность победы лошади.
2. Если вы знаете, что лошадь проиграла гонку, какова вероятность того, что погода была сухой в день скачек? (Предположим, что вы не помните!)

$$\Omega = \{(win, wet), (win, dry), (L, wet), (L, dry)\}$$

B_1	B_2
(win, wet)	(win, dry)
(L, wet)	(L, dry)

A

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) =$$

$$= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) =$$

Пример 1

Вероятность победы лошади в скачках равна 0.3, если погода сухая, и 0.5 если идет дождь. Прогноз погоды дает вероятность дождя 40%.

1. Найдите вероятность победы лошади.
2. Если вы знаете, что лошадь проиграла гонку, какова вероятность того, что погода была сухой в день скачек? (Предположим, что вы не помните!)

- $P(V) = P(V|D)P(D) + P(V|W)P(W) = 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.38$

D = dry   W = wet $\to 0.18 = P(A \cap B_2) = P(\{(win, dry)\})$

Если win

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)} = \frac{0.3 \cdot 0.6}{0.38} = 0.47$$

Пример 1

Вероятность победы лошади в скачках равна 0.3, если погода сухая, и 0.5 если идет дождь. Прогноз погоды дает вероятность дождя 40%.

1. Найдите вероятность победы лошади.
2. Если вы знаете, что лошадь проиграла гонку, какова вероятность того, что погода была сухой в день скачек? (Предположим, что вы не помните!)

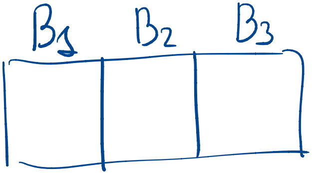
- $P(V) = P(V|D)P(D) + P(V|W)P(W) = 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.38$
- $$P(D|\bar{V}) = \frac{P(\bar{V}|D)P(D)}{P(\bar{V})} = \frac{0.7 \cdot 0.6}{1 - 0.38} \approx 0.677$$

$P(A|B_2) + P(\bar{A}|B_2) = 1$

$$P(B_2|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|B_2) \cdot P(B_2)}{P(\bar{A})} = \frac{0.7 \cdot 0.6}{1 - P(A)}$$

Пример 2

- Есть три монеты: у одной с обеих сторон орел, у второй с обеих сторон решка, у третьей орел с одной стороны и решка с другой. Мы выбираем монету наугад, подбрасываем её, и выпадает орел. Какова вероятность того, что на противоположной стороне решка?



A — орёл

$$P(A) = \overset{=1}{P(A|B_1)} \cdot P(B_1) + \overset{0}{\cancel{P(A|B_2)}} \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3)$$

$$P(A|B_3) = 1/2$$

$$P(A) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A)} = \ldots = \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2} = 1/3$$