

Теория вероятностей и математическая статистика
Дискретные случайные величины. Практическая сессия.

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

Задача 1 (4.10)

T - кол-во орлов

X - кубик

$$P(X=6|T=4) = \frac{P(T=4|X=6) \cdot P(X=6)}{P(T=4)}$$

- Подбрасывается кубик, а затем монетка подбрасывается столько раз, сколько очков выпало на кубике. Известно, что орел выпал ровно 4 раза. Какова вероятность того, что на кубике выпала «6»?

$$P(T=4) = P(T=4|X=4) \cdot P(X=4) +$$

$$+ P(T=4|X=5) \cdot P(X=5) +$$

$$+ P(T=4|X=6) \cdot P(X=6)$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (3, 0P, P, 0P) \dots \\ (3, P, P, P) \dots \\ (6, \underbrace{0P, \dots, 0P}_6) \dots \end{array} \right\}$$

Слайд для записей

$$P(T=4) = P(T=4|X=4) \cdot P(X=4) + \\ + P(T=4|X=5) \cdot P(X=5) + \\ + P(T=4|X=6) \cdot P(X=6)$$

$$P(T=4|X=4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$P(T=4|X=5) = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$P(T=4|X=6) = C_6^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(X=4) = P(X=5) = P(X=6) = \frac{1}{6}$$

$$P(X=6|T=4) = \frac{P(T=4|X=6) \cdot P(X=6)}{P(T=4)} = \frac{C_6^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{6}}{0.0755} = \approx 0.52 \approx 0.517$$

Задача 2 (4.11)

- В гостинице 35 номеров. Управляющий знает, что клиент, забронировавший номер, с вероятностью 0.1 не придет. Но на каждом пустом номере гостиница теряет деньги, так что управляющий бронирует номера для 38 клиентов, с запасом — «все равно кто-нибудь не придет». Найти вероятность того, что у него возникнут проблемы — количество приехавших окажется больше количества номеров.

$$n = 38$$

$$X \sim \text{Bin}(0.9, 38)$$

$$P(X > 35) = P(X=36) + P(X=37) + P(X=38) \approx 0.254$$

$$Y = (X - 35) \cdot c$$

$$P(Y | X \geq 35) \quad E[Y | X \geq 35]$$

Задача 3 (5.3)

Простая показательная задача, важная на будущее.

- Случайный эксперимент состоит в независимом броске пары шестигранных кубиков. Пусть случайные величины X и Y обозначают числа, выпавшие на этих кубиках. Рассмотрим новую случайную величину W , которая является функцией от X и Y , $W = g(X, Y) = X + Y$.

Постройте функцию вероятности (таблицу / ряд распределения) новой случайной величины W . Обратите внимание на получившиеся значения, на каких значениях W она достигает максимума, а на каких минимума.

Слайд для записей

$X \setminus Y$	1	...	6
1	$\frac{1}{36}$...	$\frac{1}{36}$
...
6	$\frac{1}{36}$...	$\frac{1}{36}$

$$W = g(X, Y) = X + Y$$

w	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_W(w)$	$\frac{1}{36}$					$\frac{6}{36}$					$\frac{1}{36}$

$$P_W(W=2) = P(X=1; Y=1) = \frac{1}{36}$$

$$P_W(W=12) = P(X=6; Y=6) = \frac{1}{36}$$

$$P_W(W=7) =$$

$$P_{(X,Y)} \{(3,4) \dots (1,6)\} = \frac{6}{36}$$

$$T = U^2 - 4V$$

Задача 4 (5.6)

- Случайные величины U и V принимают значения ± 1 . Их совместное распределение задано следующим образом:

$U \setminus V$	+1	-1
+1	1	2
-1	3	4

$$P\{U = -1\} = P\{U = 1\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{V = +1|U = 1\} = P\{V = -1|U = -1\} = \frac{1}{3},$$

$$P\{V = -1|U = 1\} = P\{V = +1|U = -1\} = \frac{2}{3},$$

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x; Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$P(1) = \frac{1}{6} \quad P(2) = \frac{2}{6}$$

$$P(3) = \frac{2}{6} \quad P(4) = \frac{1}{6}$$

- Найдите вероятность того, что уравнение $x^2 + Ux + V = 0$ имеет хотя бы один действительный корень.
- Найдите вероятность того, что уравнение $x^2 + (U + V)x + (U + V) = 0$ имеет хотя бы один действительный корень.

Слайд для записей

$$x^2 + ux + v = 0$$

$$u^2 - 4v \geq 0$$

$$P_{u,v} \{(+1, -1), (-1, -1)\} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + (u+v)x + (u+v)$$

$$(u+v)^2 - 4(u+v) = (u+v) \cdot (u+v-4) \geq 0$$

$$P(u+v \leq 0) = P_{u,v} \{(-1, +1), (+1, -1), (-1, -1)\} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Задача 5 (5.6)

$$P(Y=0) \neq P(Y=0|X=0)$$

$$\frac{1}{3}$$

\neq

$$1$$

- Пусть случайная величина X имеет распределение:

$$P\{X = -1\} = P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{3},$$

а Y задаётся соотношением:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{если } X = 0 \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$X \setminus Y$	0	1	
-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

Проверьте, являются ли X и Y независимыми. Найдите ковариацию между X и Y .

$$P(X=-1) \cdot P(Y=0) = \frac{1}{9} \neq P(\{X=-1\} \cap \{Y=0\}) = P(X=-1; Y=0)$$

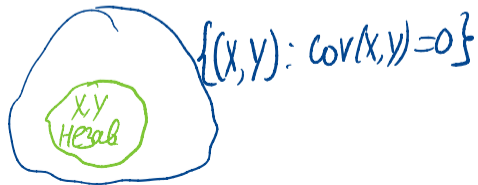
Слайд для записей

X\Y	0	1	
-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

$$E[X \cdot Y] = -1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$E[X] = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] = 0$$



Слайд для записей

$X \backslash Y$	y_1	y_2
x_1		
x_2		

1. X и Y независимы

$$E[XY] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_i y_j \cdot P(X=x_i, Y=y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_i y_j \cdot P(X=x_i) \cdot P(Y=y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^2 x_i \cdot P(X=x_i) \cdot \left(\sum_{j=1}^2 y_j \cdot P(Y=y_j) \right) =$$

$$= E[X] \cdot E[Y]$$

Слайд для записей

$X \setminus Y$	y_1	y_2
x_1		
x_2		

$$\begin{aligned} \textcircled{2} E[X \cdot Y] &= E[X] \cdot E[Y] \\ &= (x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2)) \cdot (y_1 \cdot P(y_1) + y_2 \cdot P(y_2)) = \\ &= x_1 y_1 P(x_1) P(y_1) + \\ &+ x_1 y_2 P(x_1) P(y_2) + \\ &+ x_2 y_1 P(x_2) P(y_1) + \\ &+ x_2 y_2 P(x_2) P(y_2) \end{aligned}$$

Слайд для записей

$$\text{Var}(aX \pm bY) = a^2 \cdot \text{Var}X \pm 2ab (E[XY] - E[X] \cdot E[Y]) + b^2 \text{Var}Y$$

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\|_x \cdot \|b\|_x$$

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq \text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])]$$

$$(a^2 + 2ab \dots)$$

$$(a^2 \text{Var}X - 2ab \sqrt{\text{Var}X \text{Var}Y} + b^2 \text{Var}Y) \leq \text{Var}(\dots) \leq$$