Теория вероятностей и математическая статистика

Вероятностное пространство. Классическая вероятность.

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

Андрей Колмогоров меняет всё

Описание случайного эксперимента

Пространство элементарных исходов

- Множество, которое содержит все возможные уникальные результаты случайного эксперимента:

Ω

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_n,\ \ldots\}$$

- Может быть конечным или бесконечным
- Критически зависит от установки случайного эксперимента и того, что мы хотим наблюдать и описывать

Описание случайного эксперимента

Пространство элементарных исходов: примеры

- Подбрасываются две визуально различимые монеты: $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$
- Подбрасываются две идентичные монеты: $\Omega = \{2H, 2T, Diff\}$
- Идентичные монеты с внедренным различием: $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$

Описание случайного эксперимента

Ω

$w_1 = (ОРРООО..Р)$

$w_2 = (РОРРРР.Р)$

Пространство элементарных исходов: примеры

- Подбрасываются две визуально различимые монеты: $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$
- Подбрасываются две идентичные монеты: $\Omega = \{2H, 2T, Diff\}$
- Идентичные монеты с внедренным различием: $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$, 2 раза подряд
- Кубик со сторонами-буквами: $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$

- 3 6-гранных $\Omega = \{111, 112, \ldots, 666\}$ $|\Omega| = 6^3$
- цепочка бросков $\underbrace{О\ Р\ О\ Р \ldots \_}_{10}$ $|\Omega| = 2^{10}$

Описание случайного эксперимента

Событие

- Зачастую нас интересует не конкретный элементарный исход, а набор из нескольких, e.g. "Если выпадет 2, 3, 6", то мы получим выигрыш

$$\boxed{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{matrix}} \qquad \{2, 3, 6\}$$

Описание случайного эксперимента

Событие

- Зачастую нас интересует не конкретный элементарный исход, а набор из нескольких, e.g. "Если выпадет 2, 3, 6", то мы получим выигрыш
- Множество, построенное из одного или нескольких элементарных исходом называют событием
- Важное отличие от элементарного исхода: исход случается один и только один, событий может случиться одновременно много!

$A = \{w_1\}, \quad A = \{w_1, w_2, w_3\}$

Описание случайного эксперимента

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$

$E = \{1, \cancel{8}\}$

Событие

- Зачастую нас интересует не конкретный элементарный исход, а набор из нескольких, e.g. “Если выпадет 2, 3, 6”, то мы получим выигрыш
- Множество, построенное из одного или нескольких элементарных исходом называют событием
- Важное отличие от элементарного исхода: исход случается один и только один, событий может случиться одновременно много!
-

> **Важно!**
>
> Мы говорим, что событие произошло, если реализовался какой-то из элементарных исходов этого события.

$A = \{2, 3, 6\}$

$B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 6\}$, $D = \{2\}$

Описание случайного эксперимента

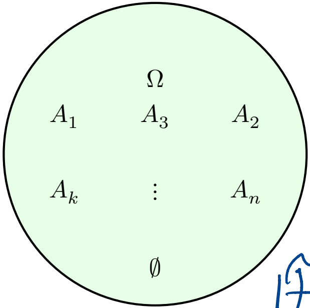
Пространство событий

- Множество, которое содержит все возможные события, которые можно построить из множества исходов Ω
- Иными словами, множество всех возможных подмножеств Ω:

$$\mathcal{F} = \{A_1,\ A_2,\ A_n,\ \ldots\},\ \forall A_i \subseteq \Omega$$

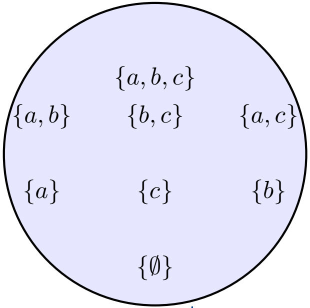
- Само пространство элементарных исходов тоже событие: $\Omega \subset \Omega$, поэтому $\Omega \in \mathcal{F}$

($\mathcal{F}$, в общем виде)



$|\mathcal{F}| = 2^{|\Omega|}$

(Пример $\mathcal{F}$: все подмножества $\{a, b, c\}$)



$|\Omega| = 2^{10}$

Описание случайного эксперимента

Пространство событий

Question

Если мощность пространства элементарных исходов $|\Omega| = n$, какая будет мощность пространства событий $|\mathcal{F}|$?

a b c $\{a, b, c\} = \Omega$

on

off

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

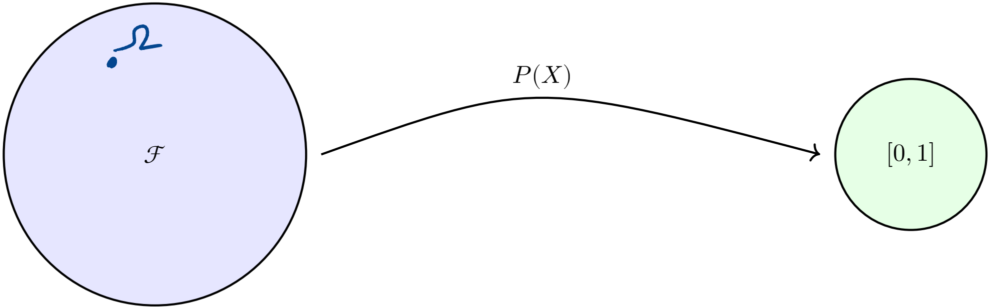
$2^{|\Omega|} = 2^3$

Описание случайного эксперимента

Вероятность

- В конечном счете мы хотим наклеить на каждое событие “бирку” с информацией о том, насколько мы уверены в том, что событие случится
- Этот коэффициент нашей уверенности решили измерять от 0 до 1, его-то и называем вероятностью
- Формально, вероятность представляет собой функцию, которая каждому событию ставит в соответствие число:

$$P(X) : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$$



Свойства вероятностной функции

- $0 \leq P(X) \leq 1, \ \forall X \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1, \ P(\emptyset) = 0$
- Свойство аддитивности вероятности:

$$\forall X, Y \in \mathcal{F} : X \cap Y = \emptyset, \ P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$$

Более душно: Если коллекция событий $A_1, A_2, \ldots$ - попарно не пересекаются, i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset, \ i \neq j$, то:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P\left(A_i\right)$$

$$P(\{1,2\}) = P(\{1\} \cup \{2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$