Теория вероятностей и математическая статистика

Случайные величины.

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

Случайные величины: Мотивация

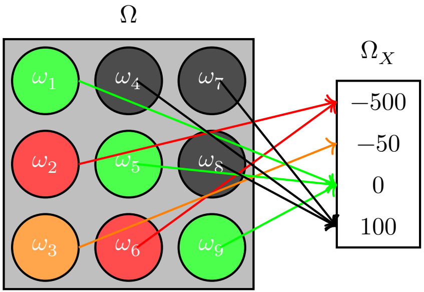
- Элементарный исход в общем может иметь различный характер: цвет, буква, звук и т.д. Но для более углубленного и полного анализа случайного эксперимента лучше работать с числами.
- Можем ли мы также прикрепить число к каждому элементарному исходу независимо от его природы, а затем оперировать **только** в пространстве чисел? Спойлер: это даст нам новые инструменты, которые недоступны, если мы работаем с исходами разной природы.
- Пример: игральная кость с 6 гранями, 2 грани желтые, 2 грани зеленые, 2 грани черные, без чисел — мы можем искусственно прикрепить числа $1, 2, 3$ к каждому цвету.

Случайная величина

Формальное определение

Результирующее ‘прикрепленное’ число мы называем случайной величиной.

- Дискретная случайная величина X в пространстве вероятностей $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является отображением $X : \Omega \to \mathbb{R}$, такое что:



Случайная величина

$P(X=500)=\frac{1}{3}$

$P(X\geqslant 0)=$

$=P_X(\{0,100\})=\frac{3}{9}+\frac{3}{9}=\frac{6}{9}$

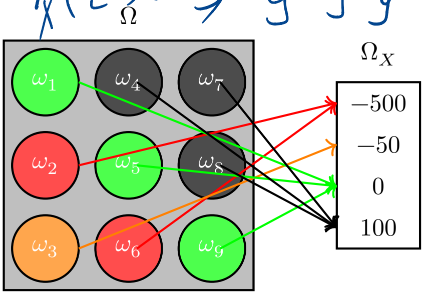
Формальное определение

Результирующее ‘прикрепленное’ число мы называем случайной величиной.

- Дискретная случайная величина X в пространстве вероятностей $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является отображением $X : \Omega \to \mathbb{R}$, такое что:

1. Образ $X(\Omega) = \Omega_X = Im\,X$ (все возможные результаты) является подмножеством $\mathbb{R}$,
2. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$, для $x \in \mathbb{R}$.

- Для упрощения мы сокращаем события вида $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ до более простого вида $\{X = x\}$.



$P(X=-500)=\frac{2}{9}$

Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из $\mathcal{F}$. Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.
- Определение. Функция вероятности дискретной случайной переменной X - это функция $p_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$, заданная как:

$$P_X(x) = P(X = x) = P(A), \text{ где } A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

- Свойства:

1. $p_X(x) \geq 0$ для $\forall x \in \Omega_X$, $p_X(x) = 0$ для $x \notin \Omega_X$
2. $\sum\limits_{x_i \in \Omega_X} p_X(x_i) = 1.$

$$\sum_{x_i \in \Omega_X} p_X(x_i) = \sum_{x_i \in \Omega_X} P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}\right) = P\left(\bigcup_{x_i \in \Omega_X} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}\right) = P\left(\Omega\right) = 1.$$

Случайные величины: Пример

Подбрасываются две монеты. Первая монета выпадает орлом с вероятностью 0.6, вторая с вероятностью 0.7. Предположим, что результаты подбрасываний независимы, и пусть X равно общему количеству выпавших орлов. Постройте дискретную случайную величину и её функцию вероятности.

$P(OO) = 0.42$ $\quad$ $P(PO) = 0.28$

$P(OP) = 0.18$ $\quad$ $P(PP) = 0.12$

x	0	1	2
P_X	0.12	0.46	0.42

Новое вероятностное пространство

- Как и прежде, мы можем комбинировать случайные переменные в события.
- Например, $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $x_1, \ldots, x_k \in \Omega_X$.
- Для вычисления $P(A)$ мы используем принцип аддитивности:

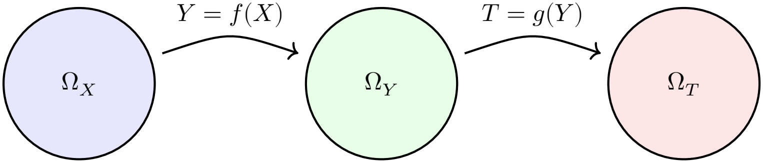
$P(X \geq 1)$

$$P(A) = P(\{X = x_1\} \cup \ldots \cup \{X = x_k\}) = \sum_{i=1}^{k} P(\{X = x_i\}).$$

$P(-5 < X \leq 0)$

- В конечном счете, мы можем забыть о нашем оригинальном $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, скрыть их «под капотом» нашего случайного эксперимента. Вместо этого мы используем новое пространство Ω_X всех возможных значений С.В. и $p_X(x)$ как новую функцию вероятности.

Функции от случайных величин

- Случайная величина, будучи неизвестным, но все-таки числом, может быть аргументом для какой-либо другой функции,
- Например, если X - это количество проданных тортов, то $Y = cX$ - это доход, где c - цена. Далее, $T = Y - aX - b = kX - b$ может быть чистой прибылью, доход за вычетом издержек на производство. Все это - случайные величины!
- 

Функции от случайных величин

$P_Y(Y=11) = $

$= P_X(\{1,-1\}) = 0.3$

y	10	11	14	19
P_Y	0.1	0.3	0.3	0.3

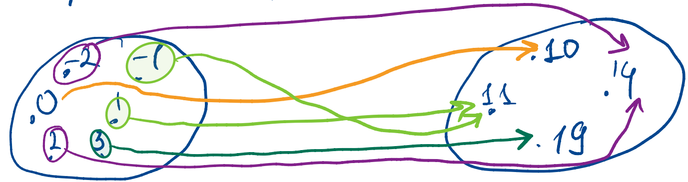
Пример

Пусть распределение случайной величины задано таблицей

x	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

Постройте распределение (функцию вероятности) случайной величины $Y = X^2 + 10$.

$\Omega_X \qquad Y = F(X) \qquad \Omega_Y$



Функции от случайных величин

Пример

Пусть распределение случайной величины задано таблицей

x	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

Постройте распределение (функцию вероятности) случайной величины $Y = X^2 + 10$.

Наша задача: восстановить новое пространство элементарных исходов Ω_Y для величины Y и выразить новую функцию вероятности $P_Y(y)$ через старую известную $P_X(x)$.

- $P_Y(Y = 10) = P_X(\{X = 0\}) = 0.1$
- $P_Y(Y = 11) = P_X(\{X = 1\} \cup \{X = -1\}) = P_X(\{X = 1\}) + P_X(\{X = -1\}) = 0.3$
- $P_Y(Y = 14) = P_X(\{X = 2\} \cup \{X = -2\}) = P_X(\{X = 2\}) + P_X(\{X = -2\}) = 0.3$
- $P_Y(Y = 19) = P_X(\{X = 3\}) = 0.3$
-

y	10	11	14	19
$p_Y(y)$	0.1	0.3	0.3	0.3

Функции от случайных величин

- Если $Y = g(X)$, то Y это новая случайная величина, со своими характеристиками, со своими возможными значениями Ω_Y, и со своей функцией вероятности $P_Y(y)$.
-

Построение новой функции вероятности

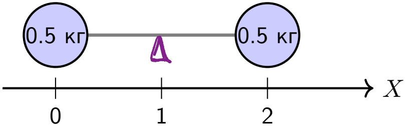
Если $Y = g(X)$, функцию вероятности для Y можно выразить через функцию вероятности для X:

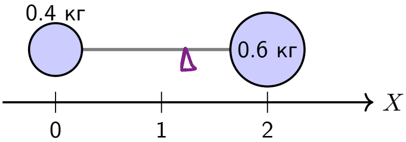
$$p_Y(y) = P(Y = y) = \underset{X}{P}(g(X) = y) = P(\{X \in g^{-1}(y)\}) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x)$$

- Можно расширить предыдущую картинку и в каком-то смысле говорить, что функция от случайной величины порождает абсолютно новый случайный эксперимент с новым вероятностным пространством (тройкой Колмогорова):

$$\begin{tikzcd} \Omega_X, \mathcal{F}_X, P_X \arrow[r, bend left, "Y = f(X)"] & \Omega_Y, \mathcal{F}_Y, P_Y \arrow[r, bend left, "T = g(Y)"] & \Omega_T, \mathcal{F}_T, P_T \end{tikzcd}$$

Физическое ~~Лирическое~~ отступление

- 

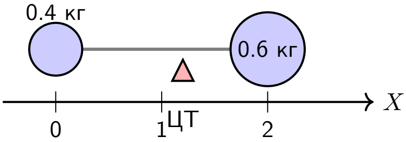
- 

$X_{цм} = \sum x_i \cdot m_i$, $\sum m_i = 1$

$0.4 \cdot 0 + 2 \cdot 0.6 = 1.2$

Физическое ~~Лирическое~~ отступление

$$\frac{99000 \cdot 2 + 1000 \cdot 0}{100\,000} \simeq 1.98$$



- $x_{gc} = \sum_i x_i m_i$, при $\sum_i m_i = 1$.
- В данном примере $x_{gc} = 0 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.6 = 1.2$
- Предположим С.В., которую мы реализуем 10^5 раз с $P_X(0) = 0.4$, $P_X(2) = 0.6$. Посчитаем среднее суммы за все испытания:

$$avg = \frac{\approx 60000 \cdot 2 + \approx 40000 \cdot 0}{10^5} \approx 1.2$$

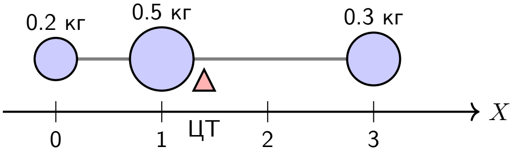
Характеристики С.В.: Математическое ожидание

- Математическое ожидание - это число, **константа**, которое помогает нам понять тренд значений, куда в среднем стремятся значения случайной величины на большой дистанции.
- Можно рассматривать это как средний результат множества реализаций данного случайного эксперимента.
- Ожидаемое значение может не входить в набор возможных значений Ω_X.
-

> **Definition**
>
> Если X - дискретная случайная величина, то ожидание X обозначается как $E[X]$ и определяется как:
> $$E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} xP(X = x) = \sum_{x \in \Omega_X} xP_X(x).$$

Характеристики С.В.: Математическое ожидание

В физическом мире:



- $x_{gc} = \sum x_i m_i = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3 = 1.4$

В вероятностном мире:

x	0	1	3
$p_X(x)$	0.2	0.5	0.3

$$\approx \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0 + 50 \cdot 10^3 \cdot 1 + 30 \cdot 10^3 \cdot 3}{10^5} \approx 1.4$$

- $E[X] = \sum x_i \cdot P_X(X = x_i) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3 = 1.4$

Fun facts

В международной литературе функция вероятности дискретной случайной величины $P_X(x)$ называется Probability **Mass** Function, своим названием явно подчеркивая аналогию, что вероятность может выступать в роли “массы” элементарного исхода. Тогда математическое ожидание можно интерпретировать как взвешенную сумму всех исходов, где в качестве веса используется вероятность.