

# Теория вероятностей и математическая статистика

## Случайные величины.

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

## Случайные величины: Мотивация

- Элементарный исход в общем может иметь различный характер: цвет, буква, звук и т.д. Но для более углубленного и полного анализа случайного эксперимента лучше работать с числами.
- Можем ли мы также прикрепить число к каждому элементарному исходу независимо от его природы, а затем оперировать **только** в пространстве чисел? Спойлер: это даст нам новые инструменты, которые недоступны, если мы работаем с исходами разной природы.
- Пример: игральная кость с 6 гранями, 2 грани желтые, 2 грани зеленые, 2 грани черные, без чисел — мы можем искусственно прикрепить числа 1, 2, 3 к каждому цвету.

## Случайная величина

$$P(X=-500) = \frac{2}{9}$$

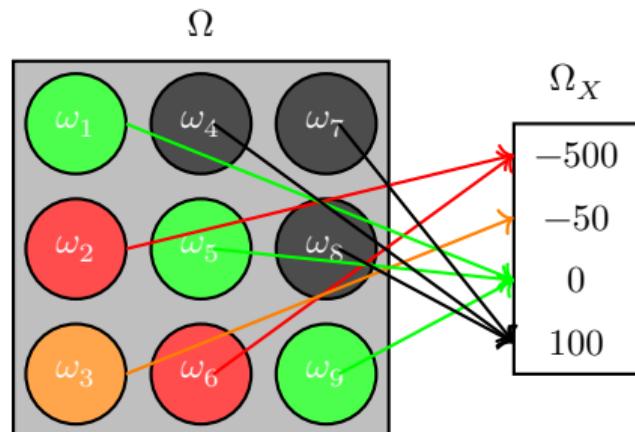
### Формальное определение

Результирующее 'прикрепленное' число мы называем случайной величиной.

- Дискретная случайная величина  $X$  в пространстве вероятностей  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  является отображением  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , такое что:
  1. Образ  $X(\Omega) = \Omega_X = \text{Im } X$  (все возможные результаты) является подмножеством  $\mathbb{R}$ ,
  2.  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$ , для  $x \in \mathbb{R}$ .
- Для упрощения мы сокращаем события вида  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$  до более простого вида  $\{X = x\}$ .

$$\{X = -500\}$$

$$P(X=100) = \frac{3}{9}$$



## Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из  $\mathcal{F}$ . Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.
- Определение. Функция вероятности дискретной случайной переменной  $X$  - это функция  $p_X(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , заданная как:

$$P_X(x) = P(X = x) = P(A), \text{ где } A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

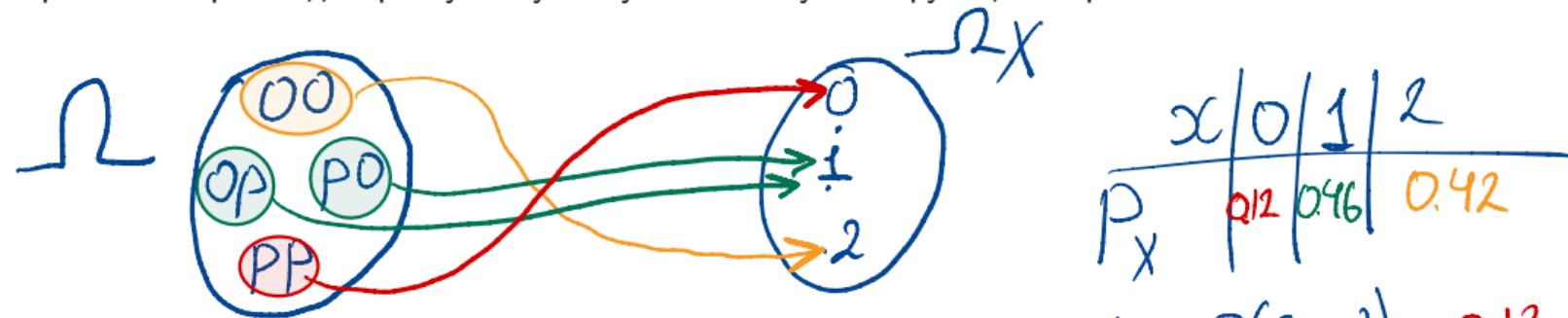
- Свойства:

1.  $p_X(x) \geq 0$  для  $\forall x \in \Omega_X$ ,  $p_X(x) = 0$  для  $x \notin \Omega_X$
2.  $\sum_{x_i \in \Omega_X} p_X(x_i) = 1$ .

$$\sum_{x_i \in \Omega_X} p_X(x_i) = \sum_{x_i \in \Omega_X} P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}) = P\left(\bigcup_{x_i \in \Omega_X} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

## Случайные величины: Пример

Подбрасываются две монеты. Первая монета выпадает орлом с вероятностью 0.6, вторая с вероятностью 0.7. Предположим, что результаты подбрасываний независимы, и пусть  $X$  равно общему количеству выпавших орлов. Постройте дискретную случайную величину и её функцию вероятности.



$$P(00) = 0.42 \quad P(0P) = 0.18$$

$$P(PP) = 0.12 \quad P(PO) = 0.28$$

$X$	$0$	$1$	$2$
$P_X$	0.12	0.46	0.42

$$P(X=0) = P(\{PP\}) = 0.12$$

$$P(X=1) = P(\{0P, PO\}) = 0.46$$

$$P(X=2) = P(\{00\}) = 0.42$$

## Новое вероятностное пространство

- Как и прежде, мы можем комбинировать случайные переменные в события.
- Например,  $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $x_1, \dots, x_k \in \Omega_X$ .
- Для вычисления  $P(A)$  мы используем принцип аддитивности:

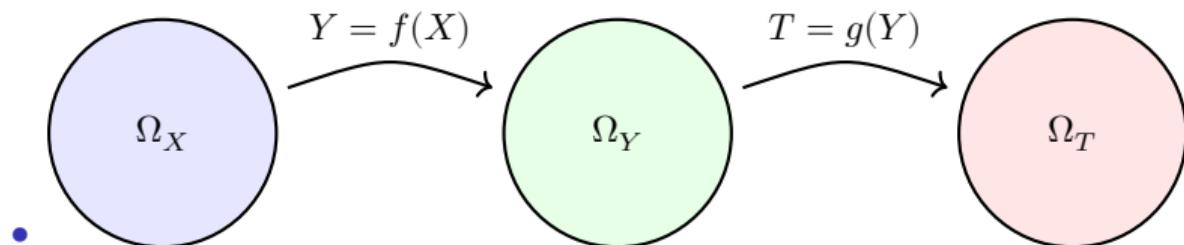
$$P(X \in A)$$

$$P(A) = P(\{X = x_1\} \cup \dots \cup \{X = x_k\}) = \sum_{i=1}^k P(\{X = x_i\}).$$

- В конечном счете, мы можем забыть о нашем оригинальном  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , скрыть их «под капотом» нашего случайного эксперимента. Вместо этого мы используем новое пространство  $\Omega_X$  всех возможных значений С.В. и  $p_X(x)$  как новую функцию вероятности.

## Функции от случайных величин

- Случайная величина, будучи неизвестным, но все-таки числом, может быть аргументом для какой-либо другой функции,
- Например, если  $X$  - это количество проданных тортов, то  $Y = cX$  - это доход, где  $c$  - цена. Далее,  $T = Y - aX - b = kX - b$  может быть чистой прибылью, доход за вычетом издержек на производство. Все это - случайные величины!



## Функции от случайных величин



Пример

Пусть распределение случайной величины задано таблицей

$x$	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

Постройте распределение (функцию вероятности) случайной величины  $Y = X^2 + 10$ .

$$P_Y(Y=10) = P_X(X=0) = 0.1$$

$$P_Y(Y=11) = P_X(\{1, -1\}) = 0.3$$

$$P(Y=14) = P_X(\{2, -2\}) = 0.3$$

$$P_Y(Y=19) = P_X(X=3)$$

$Y$	10	11	14	19
$P_Y$	0.1	0.3	0.3	0.3

## Функции от случайных величин

### Пример

Пусть распределение случайной величины задано таблицей

$x$	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

Постройте распределение (функцию вероятности) случайной величины  $Y = X^2 + 10$ .

Наша задача: восстановить новое пространство элементарных исходов  $\Omega_Y$  для величины  $Y$  и выразить новую функцию вероятности  $P_Y(y)$  через старую известную  $P_X(x)$ .

- $P_Y(Y = 10) = P_X(\{X = 0\}) = 0.1$
- $P_Y(Y = 11) = P_X(\{X = 1\} \cup \{X = -1\}) = P_X(\{X = 1\}) + P_X(\{X = -1\}) = 0.3$
- $P_Y(Y = 14) = P_X(\{X = 2\} \cup \{X = -2\}) = P_X(\{X = 2\}) + P_X(\{X = -2\}) = 0.3$
- $P_Y(Y = 19) = P_X(\{X = 3\}) = 0.3$

$y$	10	11	14	19
$p_Y(y)$	0.1	0.3	0.3	0.3

## Функции от случайных величин

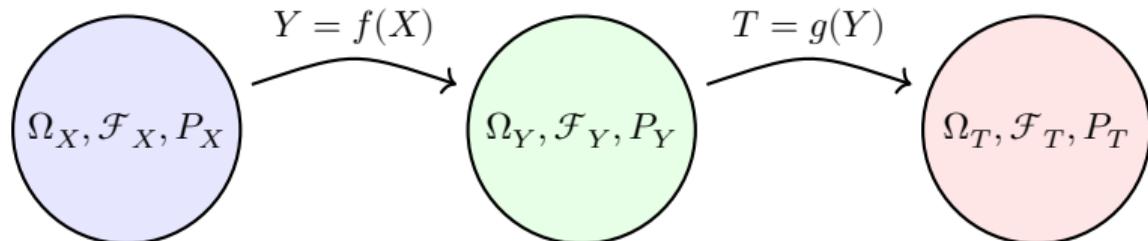
- Если  $Y = g(X)$ , то  $Y$  это новая случайная величина, со своими характеристиками, со своими возможными значениями  $\Omega_Y$ , и со своей функцией вероятности  $P_Y(y)$ .
- 

### 💡 Построение новой функции вероятности

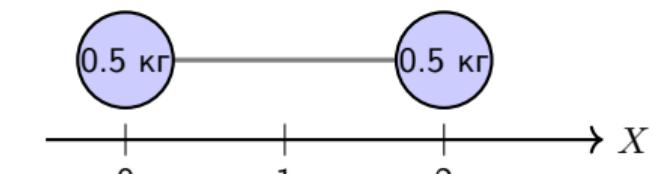
Если  $Y = g(X)$ , функцию вероятности для  $Y$  можно выразить через функцию вероятности для  $X$ :

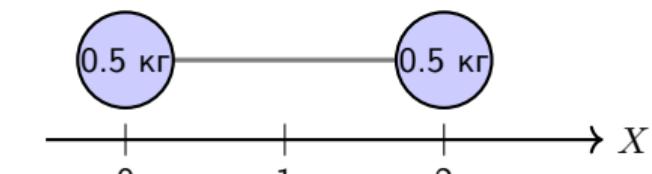
$$p_Y(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(\{X \in g^{-1}(y)\}) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x)$$

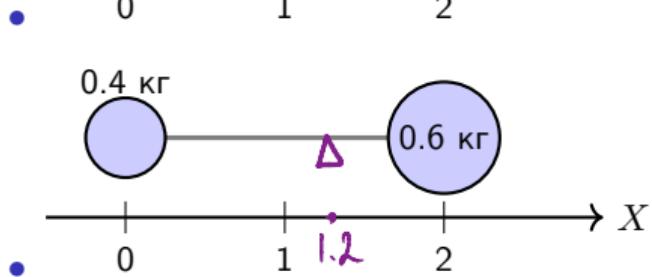
- Можно расширить предыдущую картинку и в каком-то смысле говорить, что функция от случайной величины порождает абсолютно новый случайный эксперимент с новым вероятностным пространством (тройкой Колмогорова):

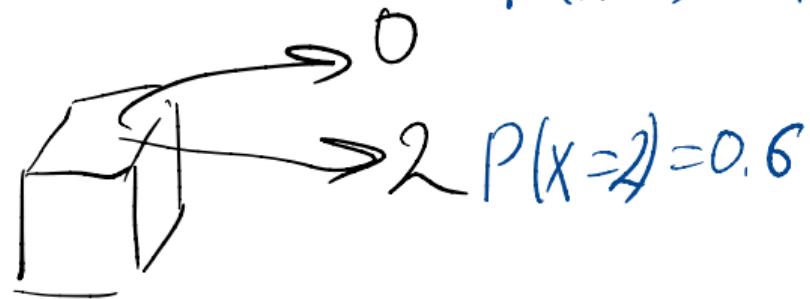


## Физическое Лирическое отступление

- 

•   $0.5 \text{ кг}$   $0.5 \text{ кг}$

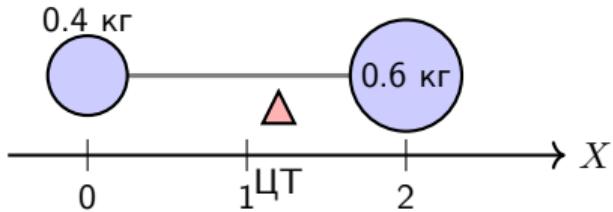
•  $0.4 \text{ кг}$   $\Delta$   $0.6 \text{ кг}$



$$P(X=0) = 0.4$$

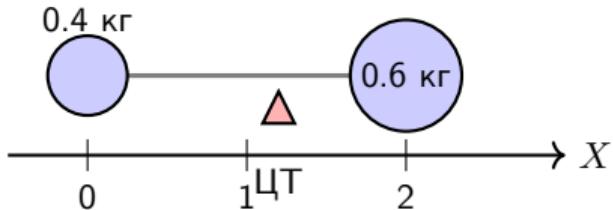
$$P(X=2) = 0.6$$

## Физическое Лирическое отступление



- $x_{gc} = \sum_i x_i m_i$ , при  $\sum_i m_i = 1$ .

## Физическое Лирическое отступление



$$P(X=2) = 0.99$$

$$P(X=0) = 0.01$$

$$\approx \frac{99000 \cdot 2 + 1000 \cdot 0}{100000} \approx 1.98$$

- $x_{gc} = \sum_i x_i m_i$ , при  $\sum_i m_i = 1$ .
- В данном примере  $x_{gc} = 0 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.6 = 1.2$
- Предположим С.В., которую мы реализуем  $10^5$  раз с  $P_X(0) = 0.4$ ,  $P_X(2) = 0.6$ . Посчитаем среднее суммы за все испытания:

$$avg = \frac{\approx 60000 \cdot 2 + \approx 40000 \cdot 0}{10^5} \approx 1.2$$

## Характеристики С.В.: Математическое ожидание

- Математическое ожидание - это число, **константа**, которое помогает нам понять тренд значений, куда в среднем стремятся значения случайной величины на большой дистанции.
- Можно рассматривать это как средний результат множества реализаций данного случайного эксперимента.
- Ожидаемое значение может не входить в набор возможных значений  $\Omega_X$ .
- 

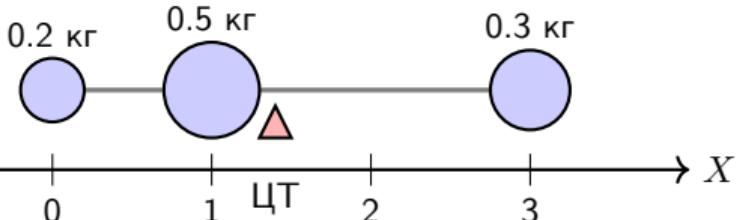
### Definition

Если  $X$  - дискретная случайная величина, то ожидание  $X$  обозначается как  $E[X]$  и определяется как:

$$E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} xP(X = x) = \sum_{x \in \Omega_X} xP_X(x).$$

## Характеристики С.В.: Математическое ожидание

В физическом мире:



- $x_{gc} = \sum x_i m_i = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3 = 1.4$

В вероятностном мире:

$x$	0	1	3
$p_X(x)$	0.2	0.5	0.3

$$\mathcal{X} \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0 + 50 \cdot 10^3 \cdot 1 + 30 \cdot 10^3 \cdot 3}{10^5} \approx 1.4$$

- $E[X] = \sum x_i \cdot P_X(X = x_i) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3 = 1.4$

### Fun facts

В международной литературе функция вероятности дискретной случайной величины  $P_X(x)$  называется **Probability Mass Function**, своим названием явно подчеркивая аналогию, что вероятность может выступать в роли “массы” элементарного исхода. Тогда математическое ожидание можно интерпретировать как взвешенную сумму всех исходов, где в качестве веса используется вероятность.