# Теория вероятностей и математическая статистика

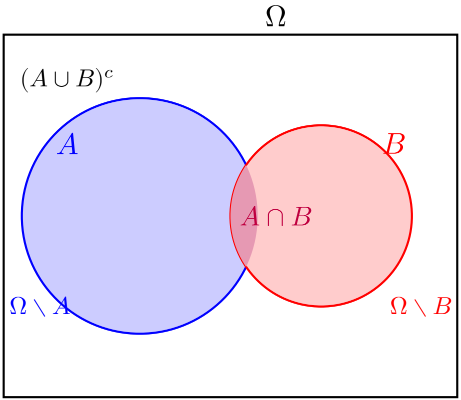
## Классическая вероятность.

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

# Вероятность

## Комплиментарные события и формула включений исключений




- Свойство: Если $A \in \mathcal{F}$, то $P(A) + P(\Omega \backslash A) = 1$. События $A$ и $\bar{A} = \Omega \backslash A$ такие, что $A \cap \bar{A} = \emptyset$, и $\Omega = A \cup \bar{A}$, откуда при помощи свойств вероятности получим: $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\Omega \backslash A) = 1$
- Формула включений-исключений: Если $A, B \in \mathcal{F}$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Событие $A$ - объединение непересекающихся $A \backslash B$ и $A \cap B$, следовательно $P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$ и симметрично $P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B)$.

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= P(A \backslash B) + 2P(A \cap B) + P(B \backslash A) \\ &= P((A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)) + P(A \cap B) \\ &= P(A \cup B) + P(A \cap B). \end{aligned}$$

- Свойство: Если $A, B \in \mathcal{F}$ and $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$. Показать просто: $P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \geq P(A)$.

$A = \{1, 2, 3\}$ кубик D6

$B$ = "нечетное"

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\underbrace{A \cap B}_{\{1,3\}}) =$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

# Классическая вероятность

- Самая первая модель вероятностного эксперимента, суть которой состоит в предположении о равной вероятности элементарных исходов случайного эксперимента. Под это подходят многие дискретные задачи, связанные со случайным выбором карт, шариков, людей, бросками кубиков и монеток, etc.
- Формализуем: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, $P(\{\omega_1\}) = \ldots = P(\{\omega_n\}) = p$.

$$P(\Omega) = 1 = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = n \cdot p = 1$$

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \ldots \cup \{\omega_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}$$

$$p = \frac{1}{n}$$

# Классическая вероятность

- Самая первая модель вероятностного эксперимента, суть которой состоит в предположении о равной вероятности элементарных исходов случайного эксперимента. Под это подходят многие дискретные задачи, связанные со случайным выбором карт, шариков, людей, бросками кубиков и монеток, etc.
- Формализуем: $\Omega = \{\omega_1, \ \dots, \ \omega_n\}$, $P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = p$.
- Применим свойства вероятности, чтобы получить интуитивно понятный результат о вероятности элементарного исхода:

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}$$

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = n \cdot p = 1 \to p = \frac{1}{n}$$

# Классическая вероятность

## Первая важная формула

- Без потери общности предположим, что некое событие $A$ состоит из $k \leq n$ элементарных исходов, $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$. Нас интересует $P(A)$.

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} \{\omega_i\} \implies P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(\{\omega_i\}) = k \cdot p = k \cdot \frac{1}{n}$$

## Первая важная формула

- Без потери общности предположим, что некое событие $A$ состоит из $k \leq n$ элементарных исходов, $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$. Нас интересует $P(A)$.
- Получим формулу для вероятности $A$:

$$A = \{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_k\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{\omega_i\}$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} P(\{\omega_i\}) = k \cdot p = \boxed{\frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

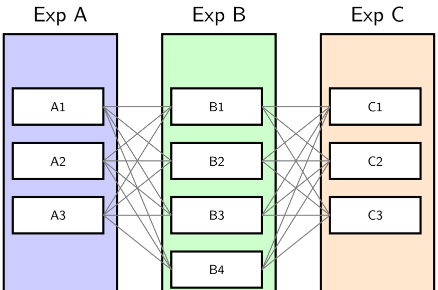
$\forall\ A = \{w_i\} \ldots \cup \ldots \{w_n\}$ ; $P(A) = P(\{w_i\}) + \ldots + P(\{w_i\})$

# Комбинаторная вероятность

## Basic principle of counting

**Definition**

Если $r$ экспериментов должны быть проведены таким образом, что первый может привести к любому из $n_1$ возможных исходов; и если для каждого из этих $n_1$ возможных исходов есть $n_2$ возможных исхода второго эксперимента; и если для каждого из возможных исходов первых двух экспериментов есть $n_3$ возможных исхода третьего эксперимента; и если …, то всего существует $\boxed{n_1 \cdot n_2 \cdots n_r}$ возможных исходов $r$ экспериментов.




$\boxed{2}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ $\boxed{20}$

$w_1 = \{h, 2, 7, 19\}$

$w_2 = \{t, 3, 2, 20\}$

$|\Omega| = 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 20$

# Комбинаторная вероятность

## Перестановки

- **Мотивация**: Сколько разных упорядоченных последовательностей получается из множества $\{a, b, c\}$
- $P_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-r+1)$

# Комбинаторная вероятность

## Перестановки: примеры

- **Question**

  **Случайная выборка чисел**. Пусть популяция состоит из десяти цифр 0, 1, ..., 9. Каждая последовательность из пяти цифр представляет выборку размера $r = 5$. Какова вероятность того, что пять последовательных случайных цифр все различны?

## Перестановки: примеры

- **Question**

  **Случайная выборка чисел**. Пусть популяция состоит из десяти цифр 0, 1, ..., 9. Каждая последовательность из пяти цифр представляет выборку размера $r = 5$. Какова вероятность того, что пять последовательных случайных цифр все различны?

- $P = \frac{P_{10}^5}{10^5} = 0.3024.$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = |A|}{|\Omega| = 10^5}$$

# Комбинаторная вероятность

## Комбинации

- **Мотивация**: Извлечь три элемента из множества $\{A, B, C, D, E\}$
- В общем случае, поскольку $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ представляет количество различных способов, которыми группа из $k$ элементов может быть выбрана из $n$ элементов, когда порядок выбора важен, и поскольку каждая группа из $k$ элементов будет подсчитана $k!$ раз в этом подсчете, следует, что количество различных групп из $k$ элементов, которые могут быть образованы из множества $n$ элементов, равно

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$P_n^k$

-

**Definition**

Мы определяем $C_n^k$, для $k \leq n$, как

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

и говорим, что $C_n^k$ представляет количество возможных комбинаций (коллекций) размера $k$, полученных из $n$ объектов. Порядок слкдования элементов в данном случае не считается важным.

a b c   c a b
a c b   c b a
b c a
b a c

## Комбинации: пример

Часто задачи подходят под модель извлечения шариков из мешка.

**Пример**: Мешок содержит 15 шариков, из которых 10 красных и 5 белых. Из мешка выбирают 4 шарика. Здесь есть неоднозначность: например, если при одном извлечении я выбираю четыре красных шарика, а при другом извлечении четыре других красных шарика, считаются ли эти выборки одинаковыми или нет?

Мы будем предполагать, что это не одинаковые выборки. Например, мы можем представить, что шарики пронумерованы, так что мы можем различать шарики одного цвета. Такой способ мышления очень полезен для вычисления вероятностей в классической схеме.

# Комбинаторная вероятность

## Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- > **Question**
  >
  > Сколько различных выборок (размера 4) возможно?

## Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- 

> **Question**
>
> Сколько различных выборок (размера 4) возможно?

- Порядок не важен, но номера важны, поэтому мы выбираем 4 элемента из множества $10 + 5$ элементов. Следовательно, ответ: $C_{15}^{4} = 1365$.

# Комбинаторная вероятность

## Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- > **Question**
  >
  > Сколько различных выборок (размера 4) возможно?
- Порядок не важен, но номера важны, поэтому мы выбираем 4 элемента из множества $10 + 5$ элементов. Следовательно, ответ: $C_{15}^{4} = 1365$.
- > **Question**
  >
  > Сколько выборок (размера 4) состоят полностью из красных шариков?

$C_{10}^{4}$

# Комбинаторная вероятность

## Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- > ℹ Question
  >
  > Сколько различных выборок (размера 4) возможно?
- Порядок не важен, но номера важны, поэтому мы выбираем 4 элемента из множества $10 + 5$ элементов. Следовательно, ответ: $C_{15}^{4} = 1365$.
- > ℹ Question
  >
  > Сколько выборок (размера 4) состоят полностью из красных шариков?
- Порядок не важен, но номера важны, мы выбираем 4 элемента из множества красных шариков. Следовательно, ответ: $C_{10}^{4} = 210$.

$\{r_1, r_2, r_3, r_4\}, \{r_1, r_2, r_3, r_5\}, \ldots$

## Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

> **Question**
>
> Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?

$\{r_1, r_2, w_1, w_2\}$

$\{r_1, r_2, w_1, w_3\}$

$C_{10}^2 \, C_5^2$

# Комбинаторная вероятность

## Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- > **Question**
  >
  > Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?
- Мы можем выбрать 2 пронумерованных красных шарика $C_{10}^2$ способами и 2 пронумерованных белых шарика $C_5^2$ способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 45 \cdot 10 = 450$.

## Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- 

> **Question**
>
> Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?

- Мы можем выбрать 2 пронумерованных красных шарика $C_{10}^2$ способами и 2 пронумерованных белых шарика $C_5^2$ способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 45 \cdot 10 = 450$.
- 

> **Question**
>
> Сколько выборок (размера 4) содержат ровно 3 красных шарика?

$r_1, r_2, r_3$ $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}$ $C_{10}^3 \quad C_5^1$

# Комбинаторная вероятность

## Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- **Question**

  Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?
- Мы можем выбрать 2 пронумерованных красных шарика $C_{10}^2$ способами и 2 пронумерованных белых шарика $C_5^2$ способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 45 \cdot 10 = 450$.
- **Question**

  Сколько выборок (размера 4) содержат ровно 3 красных шарика?
- Мы можем выбрать 3 пронумерованных красных шарика $C_{10}^3$ способами и 1 пронумерованный белый шарик $C_5^1$ способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^3 \cdot C_5^1 = 120 \cdot 5 = 600$.

## Комбинации: пример

- **Question**

  Сколько выборок (размера 4) содержат не менее 3 красных шариков?

## Комбинации: пример

- > **Question**
  >
  > Сколько выборок (размера 4) содержат не менее 3 красных шариков?

- Это количество выборок с 3 красными плюс количество выборок с 4 красными. Мы можем выбрать 4 пронумерованных красных шарика $C_{10}^{4}$ способами и 0 пронумерованных белых шариков $C_{5}^{0}$ способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^{4} \cdot C_{5}^{0} = 210 \cdot 1 = 210$. Из предыдущего примера, есть 600 способов выбрать выборки с ровно 3 красными шариками, поэтому наш ответ: $600 + 210 = 810$.

# Комбинаторная вероятность

## Смешанные задачи подсчета

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков

Это также общее количество выборок (1365) минус количество выборок без красных шариков, которое равно $C_{10}^{0} \cdot C_{5}^{4} = 5$.

## Смешанные задачи подсчета

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- **Question**

  Сколько выборок (размера 4) содержат хотя бы один красный шарик?

- Это $C^1_{10} \cdot C^3_5 + C^2_{10} \cdot C^2_5 + C^3_{10} \cdot C^1_5 + C^4_{10} \cdot C^0_5$, что равно $10 \cdot 10 + 45 \cdot 10 + 120 \cdot 5 + 210 \cdot 1 = 100 + 450 + 600 + 210 = 1360.$ $= |A|$

Это также общее количество выборок (1365) минус количество выборок без красных шариков, которое равно $C^0_{10} \cdot C^4_5 = 5.$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1360}{1365}$$

$$|\Omega| = C^4_{15}$$