1. Для случайной величины $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ найдите вероятности следующих событий:

   (a) $P(-1.5 < Z < 0.5)$,

   (b) $P(Z < 1.25)$,

   (c) $P(Z > 0.5)$,

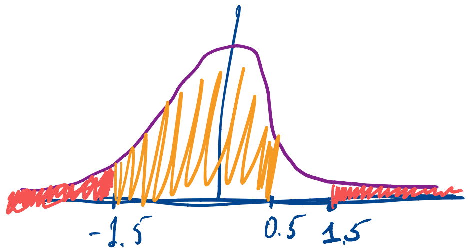
   (d) $P(Z < -0.25)$,

   (e) $P(-2 < Z < -1)$,

   (f) Найдите такую точку z_α, что $P(Z > z_\alpha) = 0.025$.
   Для подобных вопросов, когда наоборот нам дана вероятность и надо найти точку, мы тоже используем таблицу стандартного нормального распределения. Если в таблице нет точного значения вероятности, то мы выбираем ближайшее значение и используем его.

   (g) Найдите такую точку z_α, что $P(Z > z_\alpha) = 0.898$.

a) $P(-1.5 < Z < 0.5) =$



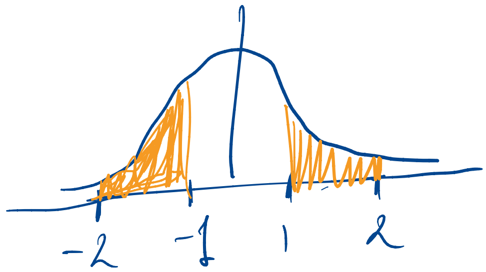
$F_Z\left(\frac{1}{2}\right) - F_Z(-1.5) =$

$F_Z(-1.5) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 1 - F_Z(1.5)$

$= F_Z(0.5) - (1 - F_Z(1.5)) = F_Z(0.5) + F_Z(1.5) - 1 =$

$= 0.6915 + 0.9332 - 1 = 0.6247$

e) $P(-2 < Z < -1) =$

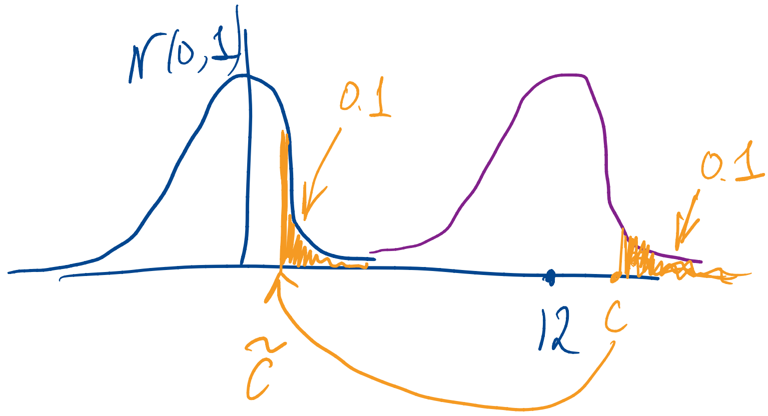


$= P(1 < Z < 2) =$

$= F_Z(2) - F_Z(1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1642$

5. Пусть X — нормальная случайная величина с математическим ожиданием 12 и дисперсией 4. Найдите такое значение c, что $P\{X > c\} = 0.1$.

$X \sim N(12, 4)$



$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

$P(X > c) = P\left(Z > \dfrac{c - \mu}{\sigma}\right) = 0.1$

$\tilde{c}$

$\tilde{c} : P(Z < \tilde{c}) = 0.9 \qquad \tilde{c} = 1.28$

$\tilde{c} = \dfrac{c - 12}{2} \Rightarrow c = 2\tilde{c} + 12 = 14.56$

6. (a) Для случайной величины $Y \sim \mathcal{N}(\mu, 5^2)$ известно, что $P(Y \geq 1) = 0.0668$. Найдите $P(Y \leq 0)$.

(b) Найдите такой симметричный относительно математического ожидания промежуток, в который случайная величина $U \sim \mathcal{N}(1000, 200^2)$ попадет с вероятностью 0.95.
Иными словами, найдите такое a, что $P(1000 - a \leq U \leq 1000 + a) = 0.95$.

a) $Y \sim N(\mu, 5^2), \quad P(Y \geqslant 1) = 0.0668$

$P(Y \leqslant 0) = P(Y < 0)$

$P(Y > 1) = P\left(Z > \dfrac{1 - \mu}{\sigma}\right) = P(Z > \tilde{c}) = 0.0668$

$\tilde{c} : \quad F_Z(\tilde{c}) = 1 - 0.0668 = 0.9332 \qquad \tilde{c} = 1.5$

$\tilde{c} = \dfrac{1 - \mu}{5} \Rightarrow \mu = 1 - 5\tilde{c} = -6.5$

$P(Y < 0) = P\left(Z < \dfrac{6.5}{5}\right) = P(Z < 1.3) = 0.9032$

10. Машина, заполняющая банки, подает в каждую банку объем X фруктов и объем Y сока. Известно, что X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 260 и стандартным отклонением 17, тогда как Y имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 150 и стандартным отклонением 10. Эти случайные величины можно считать независимыми.

(a) Вычислите вероятность того, что объем фруктов, загруженных машиной в банку, больше 290 единиц.

(b) Найдите вероятность того, что объем поданных фруктов более чем в два раза превышает объем сока.

(c) Если вместимость банки составляет 400 единиц, чему равна вероятность того, что после заполнения банка окажется недозаполнена?

b) $P(X>2Y) = P(X-2Y>0) = P(W>0)$

$W = X-2Y$, $W \sim N(-40, 689)$

$E[W] = E[X-2Y] = E[X] - 2E[Y] = 260 - 300 = -40$

$Var[W] = Var(X) + 4\,Var(Y) = 17^2 + 4 \cdot 100 = 689$, $\sqrt{689} \approx 26.25$

$$P(W>0) = P\left(Z > \frac{0-(-40)}{26.25}\right) = P(Z>1.52) =$$

$$= 1 - F_Z(1.52) = 1 - 0.9357 = 0.0643$$

12. В группе 32 студента. Известно, что оценка студента за экзамен распределена по нормальному закону со средним 7.1 и стандартным отклонением 1.2. Учебная часть требует у старосты следующие данные: суммарный балл группы и средний балл по группе. Учитывая, что конечно же студенты не списывают, то есть сдают экзамен независимо друг от друга, найдите вероятность того, что:

(a) суммарный балл группы (сумма всех оценок) превзойдет 220 баллов,

(b) средний балл по группе будет выше, чем 6.9.

$$X_i \sim N(7.1, (1.2)^2)$$

a) $P(X_1 + \dots + X_{32} > 220) = P(W > 220) =$

$W = X_1 + \dots + X_{32}$; $E[W] = \mu_W = 32 \cdot 7.1 = 227.2$

$Var[W] = 32 \cdot (1.2)^2 = 46.08$

$= 1 - P(W < 220) = 1 - P\left(Z < \frac{220 - 227.2}{6.79}\right) =$

$= 1 - P(Z < -1.06) =$

$= 1 - (1 - P(Z < 1.06)) = F_Z(1.06) =$

$= 0.8554$

b. $P\left(\frac{\sum X_i}{32} > 6.9\right) = P(U > 6.9)$

$U = \frac{\sum X_i}{32}$; $E[U] = E\left[\frac{X_1}{32} + \dots + \frac{X_{32}}{32}\right] = \frac{1}{32} \cdot 32 \cdot 7.1 = 7.1$

$Var[U] = Var\left[\frac{X_1}{32} + \dots + \frac{X_{32}}{32}\right] = \left(\frac{1}{32}\right)^2 \cdot 32 \cdot (1.2)^2 = \frac{(1.2)^2}{32}$