1. Для случайной величины $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ найдите вероятности следующих событий:

   (a) $P(-1.5 < Z < 0.5)$,

   (b) $P(Z < 1.25)$,

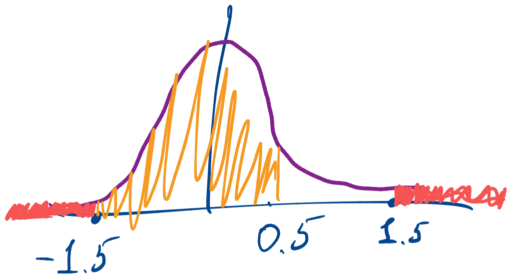
   (c) $P(Z > 0.5)$,

   (d) $P(Z < -0.25)$,

   (e) $P(-2 < Z < -1)$,

a) $P(-1.5 < Z < 0.5) =$

$= F_Z(0.5) - F_Z(-1.5) =$

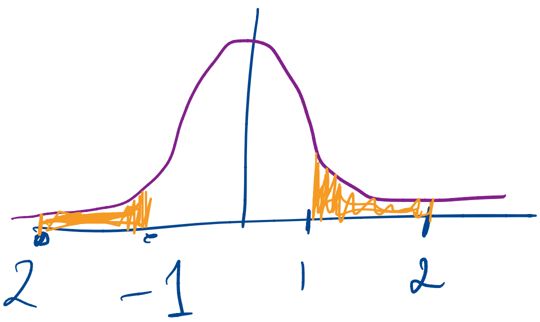


$F_Z(-1.5) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 1 - F_Z(1.5)$

$= F_Z(0.5) - (1 - F_Z(1.5)) = F_Z(0.5) + F_Z(1.5) - 1 =$

$= 0.6915 + 0.9332 - 1 = 0.6247$

e) $P(-2 < Z < -1) =$

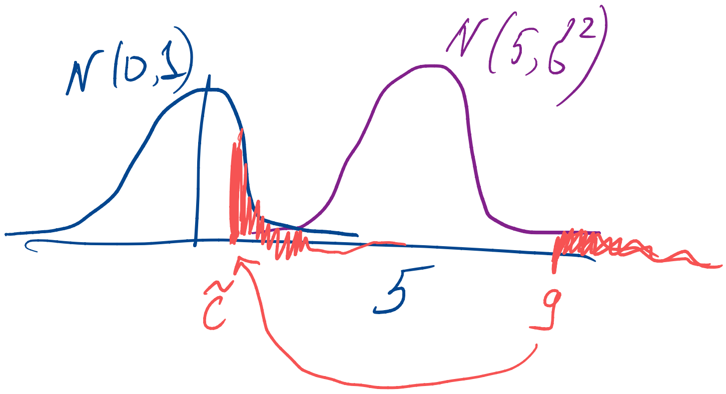


$= F_Z(2) - F_Z(1) =$

$= 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$

4. Предположим, что X — нормальная случайная величина с математическим ожиданием 5. Если $P\{X > 9\} = 0.2$, то чему приблизительно равна $Var(X)$?

$$X \sim N(5, \sigma^2)$$



$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}\ ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$P(X>9) = P\left(Z > \underbrace{\frac{9-\mu}{\sigma}}_{\tilde{c}}\right) = 0.2$$

$$\tilde{c}: P(Z>\tilde{c}) = 0.2 \Rightarrow P(Z<\tilde{c}) = 0.8 = F_Z(\tilde{c})$$

$$\tilde{c} \approx 0.84$$

$$\tilde{c} = \frac{9-5}{\sigma} = \frac{4}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{4}{\tilde{c}} = \frac{4}{0.84} \approx 4.76$$

$$Var\,X = \sigma^2 = (4.76)^2$$

10. Машина, заполняющая банки, подает в каждую банку объем X фруктов и объем Y сока. Известно, что X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 260 и стандартным отклонением 17, тогда как Y имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 150 и стандартным отклонением 10. Эти случайные величины можно считать независимыми.

(a) Вычислите вероятность того, что объем фруктов, загруженных машиной в банку, больше 290 единиц.

(b) Найдите вероятность того, что объем поданных фруктов более чем в два раза превышает объем сока.

b. $P(X>2Y)=$ $\qquad (X,Y)$

$=P(X-2Y>0)=P(W>0)=$

$W=X-2Y$; $W\sim N(-40,\ 689)$

$E[W]=\mu_W=E[X]-2E[Y]=260-300=-40$

$Var[W]=Var[X]+4\,Var[Y]=17^2+4\cdot 100=689,\quad \sigma_W\approx 26.25$

$=P\left(Z>\frac{40}{26.25}\right)=P(Z>1.52)=1-F_Z(1.52)=$

$=1-0.9357=0.0643$

12. В группе 32 студента. Известно, что оценка студента за экзамен распределена по нормальному закону со средним 7.1 и стандартным отклонением 1.2. Учебная часть требует у старосты следующие данные: суммарный балл группы и средний балл по группе. Учитывая, что конечно же студенты не списывают, то есть сдают экзамен независимо друг от друга, найдите вероятность того, что:

(a) суммарный балл группы (сумма всех оценок) превзойдет 220 баллов,

(b) средний балл по группе будет выше, чем 6.9.

$X_1 \ldots X_{32}$, $X_i \sim N(7.1, (1.2)^2)$

a) $P(X_1 + \ldots + X_{32} > 220) = P(W > 220) =$

$W = X_1 + \ldots + X_{32}$

$= P\left(Z > \frac{220 - 227.2}{\sqrt{46.08}}\right) = \ldots$

$E[W] = \mu_W = 32 \cdot E[X_i] = 32 \cdot 7.1 = 227.2$

$Var[W] = 32 \cdot Var[X_i] = 32 \cdot (1.2)^2 = 46.08$

b) $P\left(\frac{\sum X_i}{32} > 6.9\right) = P\left(\frac{X_1}{32} + \ldots + \frac{X_{32}}{32} > 6.9\right) =$

$= P(U > 6.9) = P(Z > \ldots) =$

$U = \frac{X_1}{32} + \ldots + \frac{X_{32}}{32}$

$E[U] = \mu_U = E\left[\frac{X_1}{32} + \ldots + \frac{X_{32}}{32}\right] = \frac{1}{32} \cdot 32 \cdot 7.1 = 7.1$

$Var[U] = \frac{1}{(32)^2} \cdot 32 \cdot (1.2)^2 = \frac{(1.2)^2}{32}$