

Теория вероятностей и математическая статистика
Характеристики непрерывных случайных величин. Распределения.

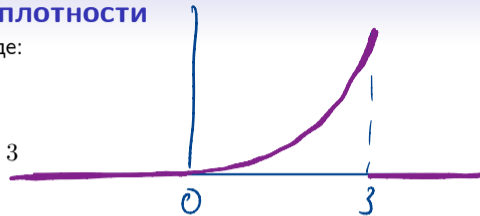
Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

Пример: анализ функции плотности

- Пусть функция плотности случайной величины X задана в виде:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$



Найдите нормировочную константу, постройте функцию распределения, посчитайте вероятности $P(-5 < X < 2)$, $P(X > 1)$.

- Проверяем выполнение условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$
$$\int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^3 f_X(x) dx + \int_3^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^3 cx^2 dx + \int_3^{+\infty} 0 dx = 1$$
$$c \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 9c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{9}$$

Пример: анализ функции плотности

- Используем формальное определение функции распределения: $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$
- Рассматриваем так же три области. Первая область $\forall x < 0$. Мы знаем, что функция плотности в этой области равна нулю.

$$1. x < 0, t < 0 \quad \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$F_X(x) = 0, \forall x < 0$$

Пример: анализ функции плотности

- Используем формальное определение функции распределения: $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

- Рассматриваем так же три области. Первая область $\forall x < 0$. Мы знаем, что функция плотности в этой области равна нулю.

$$\int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

- Вторая область $\forall x \in [0, 3]$ Знаем, что на этом интервале у функции плотности определенный вид, плюс не забудем, что мы еще ранее нашли нормировочную константу.

$$\int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt + \int_0^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1t^2}{9} dt = 0 + \frac{t^3}{27} \Big|_0^x = \frac{x^3}{27}$$

Пример: анализ функции плотности

- Используем формальное определение функции распределения: $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

- Рассматриваем так же три области. Первая область $\forall x < 0$. Мы знаем, что функция плотности в этой области равна нулю.

$$\int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

- Вторая область $\forall x \in [0, 3]$. Знаем, что на этом интервале у функции плотности определенный вид, плюс не забудем, что мы еще ранее нашли нормировочную константу.

$$\int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt + \int_0^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1t^2}{9} dt = 0 + \frac{t^3}{27} \Big|_0^x = \frac{x^3}{27}$$

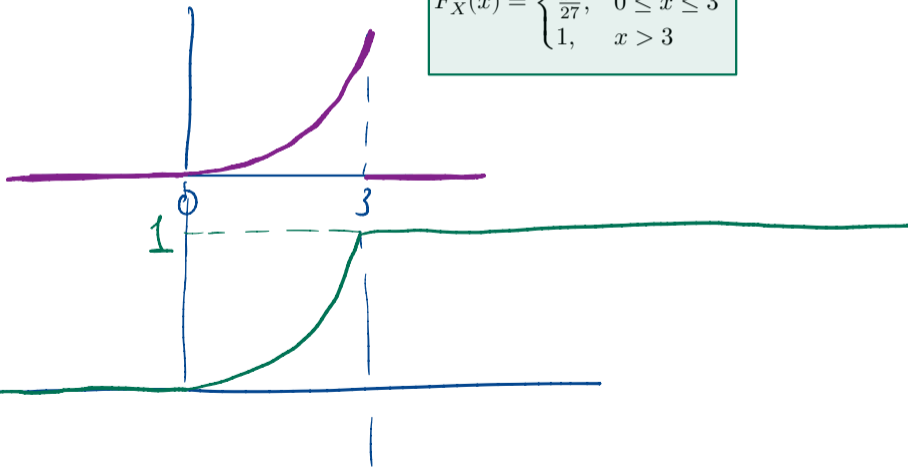
- Третья область $\forall x > 3$:

$$\int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt + \int_0^3 f_X(t) dt + \int_3^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^3 \frac{1t^2}{9} dt + \int_3^x 0 dt = 1$$

Пример: анализ функции плотности

- Финально, корректная запись функции распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{27}, & 0 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$



Пример: анализ функции плотности

- Финально, корректная запись функции распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{27}, & 0 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

- Посчитаем вероятности через основное определение и через функцию распределения и сравним результаты.

$$P(-5 < X < 2) = \int_{-5}^2 f_X(x) dx = \int_{-5}^0 f_X(x) dx + \int_0^2 f_X(x) dx = \int_{-5}^0 0 dx + \int_0^2 \frac{1x^2}{9} dx = \frac{x^3}{27} \Big|_0^2 = \frac{8}{27}$$

$$P(-5 < X < 2) = F_X(2) - F_X(-5) = \frac{8}{27} - 0$$

$$P(X > 1) = \int_1^{+\infty} f_X(x) dx = \int_1^3 f_X(x) dx + \int_3^{+\infty} f_X(x) dx = \int_1^3 \frac{1x^2}{9} dx + \int_3^{+\infty} 0 dx = \frac{x^3}{27} \Big|_1^3 = \frac{26}{27}$$

$$P(X > 1) = F_X(+\infty) - F_X(1) = 1 - \frac{1}{27}$$

Математическое ожидание

- Напомним, что для дискретной СВ мы вычисляем математическое ожидание как 'взвешенную сумму':

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i), \text{ вычисляется для } \forall x_i \in \Omega_X.$$

- Если у нас есть другая СВ G , являющаяся функцией от X : $G = g(X)$:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) P(X = x_i)$$

- Для непрерывного случая мы заменяем сумму на интеграл:

$$\sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad \sum_{i=1}^n g(x_i) P(X = x_i) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- Финально:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Дисперсия

- Формула для дисперсии остается той же:

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

- Напомним доказательство:

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] = \\ &E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2.\end{aligned}$$

Пример

$$\Leftrightarrow c \cdot \left(2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{4}{3} c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$$

$E[X]$?

$\text{Var}[X]$?

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

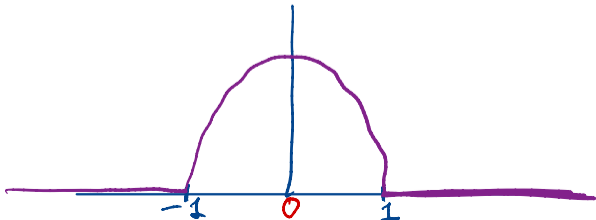
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^{-1} f_X dx + \int_{-1}^{1} f_X dx + \int_{1}^{+\infty} f_X dx = \\ &= 0 + \int_{-1}^{1} c(1-x^2) dx + 0 = c \left(\int_{-1}^{1} dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx \right) = c \left(x \Big|_{-1}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Слайд для записи

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \dots = \int_{-1}^1 x \cdot f_X(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 x \cdot (1-x^2) dx = \frac{3}{4} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 - \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 \right) =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot (0 - 0) = 0$$



Слайд для записи

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx = \dots = \int_{-1}^1 x^2 f_X(x) dx =$$

$$= \frac{3}{4} \int_{-1}^1 x^2 (1-x^2) dx = \frac{3}{4} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 - \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 \right) =$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) \right) \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{10-6}{15} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{5} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \\ = \frac{1}{5} - 0 \end{array} \right.$$