

# Теория вероятностей и математическая статистика

## Непрерывные случайные величины и их характеристики.

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

## Мотивация для нового класса случайных величин

### Пример 1: Физические измерения

- Рост человека
- Температура воздуха
- Скорость автомобиля

### Пример 2: Время ожидания

- Время "жизни" детали
- Время между звонками в call-центр

### Почему дискретные СВ не подходят?

- **Бесконечное количество значений:** Время может быть 1.234567 секунды
- **Непрерывность:** Между любыми двумя значениями есть промежуточные
- **Точность измерений:** Современные приборы дают очень точные результаты

$$P(X=a) = \frac{1}{\infty}$$

### Вероятность в точке теряет смысл

- Для непрерывных величин вероятность **точечного** события  $P(X = a)$  всегда равна нулю
- Отныне нас будет интересовать только вероятности попадания в **интервалы**:

$$P(a < X < b), P(X > c), P(X < d)$$

$P(U = \underline{220}, \underline{110}, \dots, 0)$

$$\begin{array}{r} 10^4 \\ \hline \underline{2} \quad \underline{2} \quad \underline{0} \quad \underline{1} \quad \underline{4} \quad \underline{1} \quad \underline{5} \quad \underline{7} \quad \dots \end{array}$$

## Физическое ~~Лирическое~~ вступление

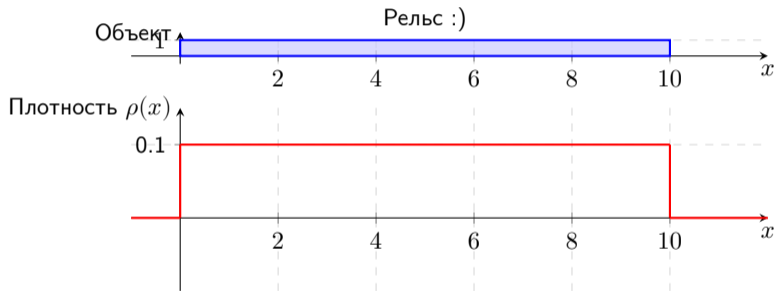
- Вспомним физику 8-го класса и формулу

$$m = \rho \cdot V, \quad [kg] = \left[ \frac{kg}{m^3} \right] [m^3]$$

- Можем перейти к линейной или погонной плотности  $\rho_l = \left[ \frac{kg}{m} \right]$ , которая покажет нам массу единицы длины некого объекта (метр проволоки, метр провода, метр плитки шоколада). Тогда масса объекта длины  $L$  будет:

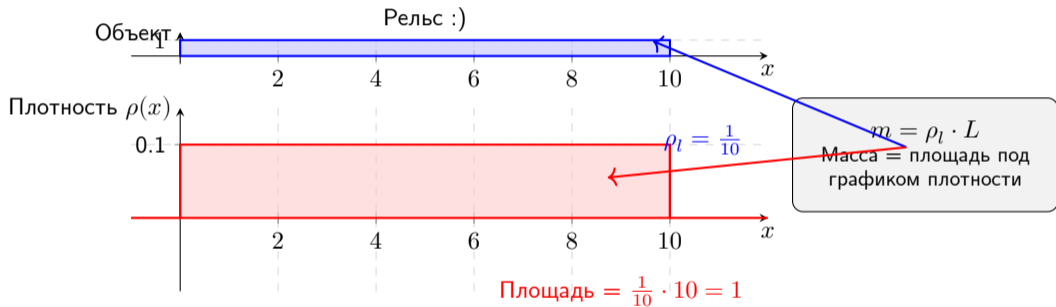
$$m = \rho_l \cdot L$$

## Связь линейной плотности и массы



$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & x > 10 \end{cases}$$

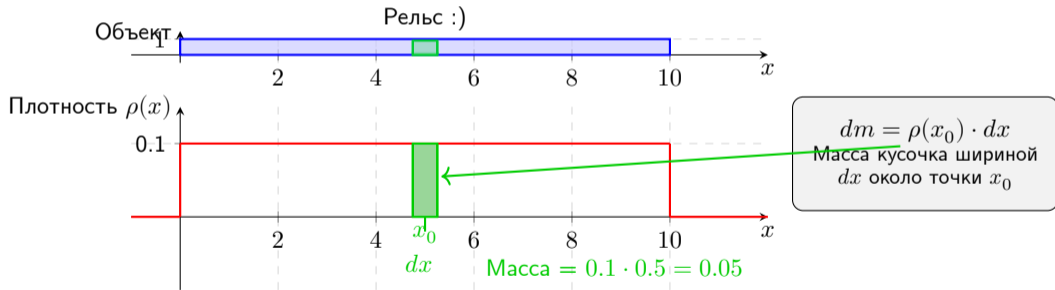
## Связь линейной плотности и массы



## Связь линейной плотности и массы

### Значение плотности в точке

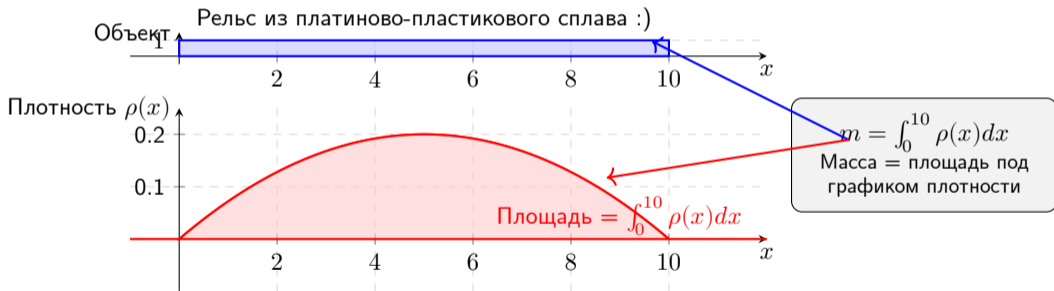
- Само по себе значение функции плотности  $\rho(x_0)$  не обозначает массу в точке  $x_0$ . Смысл несет именно произведение плотности на длину, вспомним, чтобы сократились размерности  $[kg] = \left[\frac{kg}{m}\right] [m]$



## Связь линейной плотности и массы

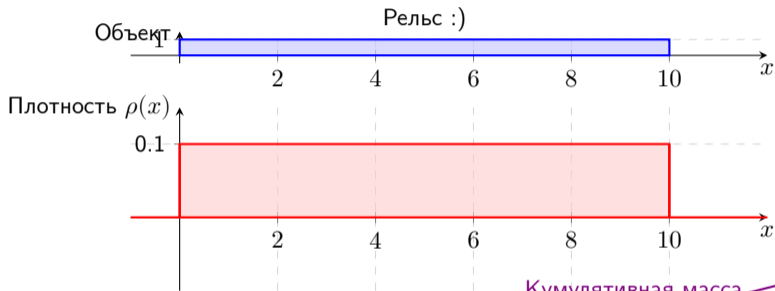
### Переменная плотность

- Не всегда линейная плотность является постоянной! В нашей аналогии из физики мы можем себе представить рельс, у которого единица длины плавно становится тяжелее от краев к центру.



## Кумулятивная масса

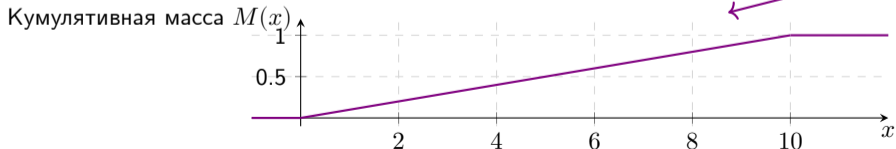
- Теперь мы хотим ввести функцию, которая покажет нам, сколько массы “скопилось” к координате  $x$ .



$$M(x) = \int_0^x \rho(t) dt$$

Кумулятивная масса

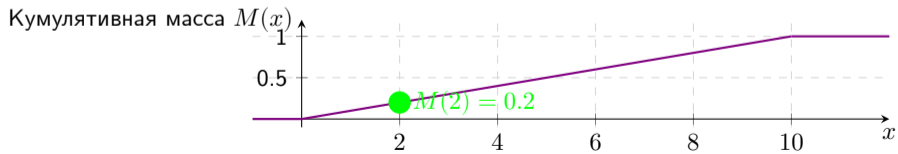
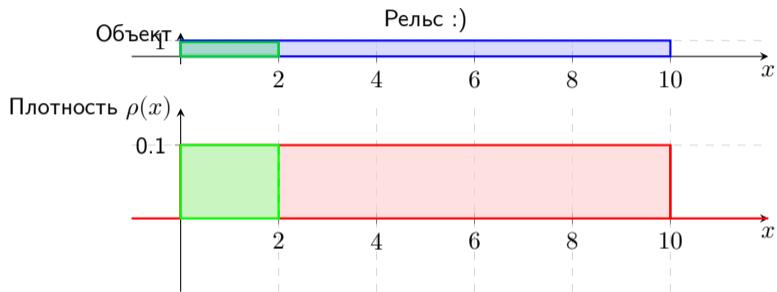
Кумулятивная масса



$$M(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1x, & 0 \leq x \leq 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases}$$

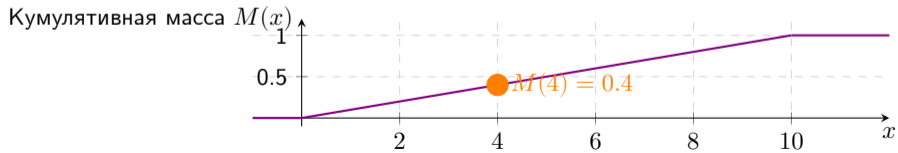
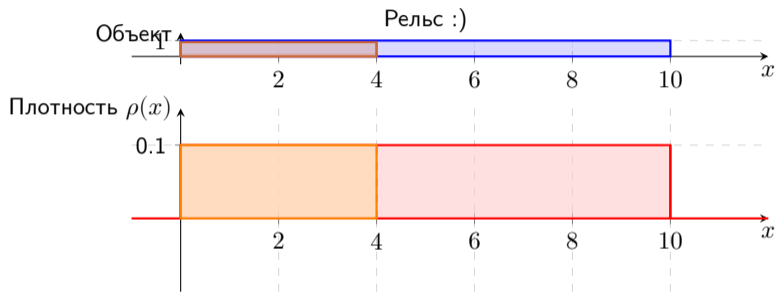
# Кумулятивная масса

## Пример 1



## Кумулятивная масса

### Пример 2



## Функция плотности вероятности

### **i** Definition

Мы называем  $X$  непрерывной случайной величиной, если существует неотрицательная функция  $f_X(x)$ , определенная для  $\forall x \in \mathbb{R}$ , такая что любая вероятность вида  $P(a \leq X \leq b)$  может быть найдена по формуле:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

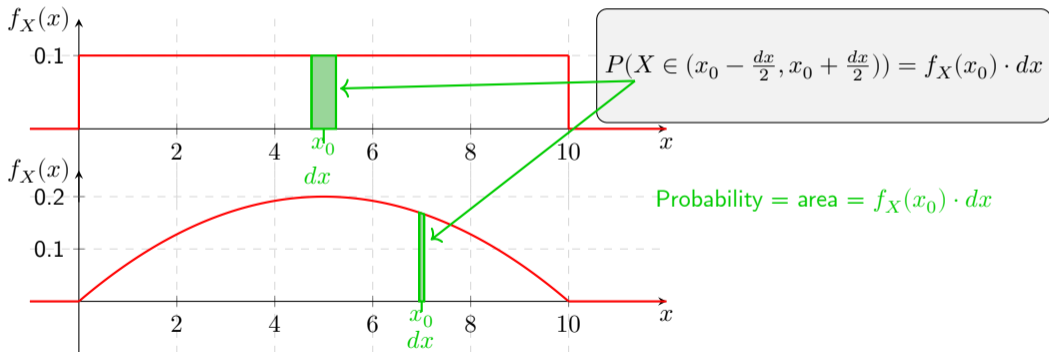
- Нормировка вероятности. Поскольку  $P(\Omega_X)$  должно быть равно 1, здесь мы имеем:

$$1 = P(\Omega_X) = P\{X \in (-\infty, +\infty)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx$$

## Функция плотности вероятности

### Значение плотности вероятности в точке

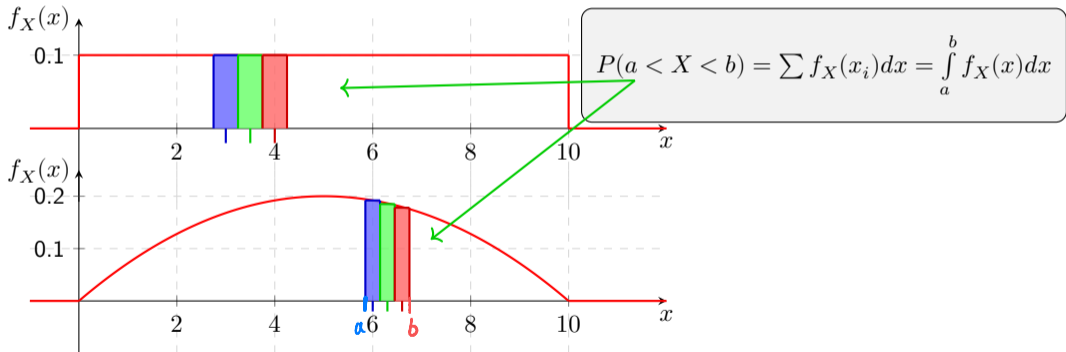
- По аналогии с физикой: само по себе значение функции плотности  $f_X(x_0)$  не обозначает вероятность в точке  $x_0$ . Смысл несет именно произведение плотности на длину интервала.



## Функция плотности вероятности

### Вероятность попадания в интервал

- Последовательно складывая такие вероятности попадания в окрестность, получаем площадь под графиком функции плотности от точки  $a$  до точки  $b$ , которая и интерпретируется нами как  $P(a < X < b)$ .



## Функция распределения(кумулятивная / интегральная)

### **i** Definition

Кумулятивная функция распределения случайной величины  $X$  - это неубывающая функция  $F_X(x)$ , определенная для  $\forall x \in \mathbb{R}$ , такая что:

$$F_X(x) = P\{X \in (-\infty, x]\} = P\{X \leq x\}$$

- Для непрерывной случайной величины мы можем переписать это как:

$$F_X(x) = P\{X \in (-\infty, x]\} = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

- Основные свойства:

$$F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(\infty) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$$

## Кумулятивная функция распределения как способ избежать интегрирования

- Предположим, нас интересует  $P(a < X < b)$ . Рассмотрим интервал  $\mathcal{D} = (-\infty, b)$ . Его можно разложить на объединение двух непересекающихся множеств:  $\mathcal{D} = (-\infty, a] \cup (a, b)$ .
- Согласно принципу аддитивности вероятности:

$$P\{X \in \mathcal{D}\} = P\{X \in (-\infty, a]\} + P\{X \in (a, b)\}$$

- В интегральной формулировке:

$$\int_{-\infty}^b f_X(x) dx = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx + \int_a^b f_X(x) dx$$

$$F_X(b) \quad F_X(a)$$

$$\int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$$

## Кумулятивная функция распределения как способ избежать интегрирования

- Предположим, нас интересует  $P(a < X < b)$ . Рассмотрим интервал  $\mathcal{D} = (-\infty, b)$ . Его можно разложить на объединение двух непересекающихся множеств:  $\mathcal{D} = (-\infty, a] \cup (a, b)$ .
- Согласно принципу аддитивности вероятности:

$$P\{X \in \mathcal{D}\} = P\{X \in (-\infty, a]\} + P\{X \in (a, b)\}$$

- В интегральной формулировке:

$$\int_{-\infty}^b f_X(x) dx = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx + \int_a^b f_X(x) dx$$

- Наконец:

$$\int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$$

Функция плотности вероятности является производной от функции распределения:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

## Пример: анализ функции плотности

- Пусть функция плотности случайной величины  $X$  задана в виде:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найдите нормировочную константу, постройте функцию распределения, посчитайте вероятности  $P(-5 < X < 2)$ ,  $P(X > 1)$ .

- Проверяем выполнение условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^0 f_X(x) dx + \int_0^3 f_X(x) dx + \int_3^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^3 cx^2 dx + \int_3^{+\infty} 0 dx = 1$$

$$c \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 9c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{9}$$