Теория вероятностей и математическая статистика

Многомерные дискретные случайные величины.

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

Введение

Возвращение в дискретный мир

- Точно так же, как некий случайный эксперимент может состоять из нескольких наблюдаемых, которые мы можем оформить в виде кортежа (набора/упорядоченного списка): $\omega = (\text{состояние}_1, \ \dots, \ \text{состояние}_n)$ (например, для серии подбрасывания монет) - мы можем наблюдать результат более чем одной случайной величины одновременно.
- Для описания этого эксперимента мы используем новое понятие - многомерная случайная величина или случайный вектор:
$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n), \text{ или в двумерном случае } (X, Y).$$
- Теперь уникальным **элементарным исходом** будет набор одновременно наблюдаемых значений случайных величин. Например, мы бросили кубик с 20 гранями и с 6 гранями, воспринимаем этот процесс как единую картину, и можем пронаблюдать результат $(x, y) = (10, 2)$.

Совместная функция вероятности

- Нас интересует взаимное поведение этих случайных величин.
- Связаны ли они? Сопровождается ли некоторое значение одной величины более часто некоторым другим значением второй величины? Можем ли мы извлекать больше информации о происходящих случайных экспериментах, когда мы учитываем взаимодействие случайных величин друг с другом?
- Для описания этого взаимодействия, или взаимного поведения, мы используем **совместную функцию вероятности**, т.е.:

	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$X = 2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

Совместная функция вероятности

- В общем виде:

	$Y = y_1$	$\dots$	$Y = y_m$
$X = x_1$	$P(\{X = x_1, Y = y_1\})$	$\dots$	$P(\{X = x_1, Y = y_m\})$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$X = x_n$	$P(\{X = x_n, Y = y_1\})$	$\dots$	$P(\{X = x_n, Y = y_m\})$

- Мы также можем записать $P(\{X = x_i, Y = y_j\})$ как $P_{X,Y}(x_i, y_j)$

Свойства

- $P_{X,Y}(x_i, y_j) \geq 0$, для всех возможных $(x_i,\, y_j)$
- В данном случае у нас $\Omega = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_n, y_m)\}$. Учитывая, что $P(\Omega) = 1$, по принципу аддивности вероятности следует:

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i,j}\{(x_i,\, y_j)\}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = 1.$$

Маргинальная функция вероятности

- От англ. marginal. В более старых переводах - частная функция вероятности, частное распределение
- Предположим, нас интересует получение результата $X = x_i$, независимо от того, чему равно Y. Это означает, что все следующие пары являются допустимыми, и они образуют специальное событие:

$$A = \{\text{мы получаем } X = x_i\} = \{(x_i,\, y_1), (x_i,\, y_2), \dots, (x_i,\, y_m)\}$$

- Если затем мы хотим найти вероятность этого события, то по свойству аддитивности:

$$P(\{X = x_i\}) = P_{X,\,Y}(x_i, y_1) + P_{X,\,Y}(x_i, y_2) + \dots + P_{X,\,Y}(x_i, y_m),$$

  т.е. мы складываем вероятности всех элементарных исходов, формирующих это событие.

- Это означает, что используя совместную функцию вероятности, мы можем восстановить собственную функцию вероятности случайной величины, как бы изолируя её отдельно от случайного вектора.
- Раньше мы называли это просто **функцией вероятности**, но теперь нам нужно уточнять, потому что добавляется много новых видов функций вероятности.

Маргинальная функция вероятности

- В общем виде:

$$P(\{X = x_i\}) = \sum_{j=1}^{m} P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = \sum_{j=1}^{m} P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$$P(\{Y = y_j\}) = \sum_{i=1}^{n} P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = \sum_{i=1}^{n} P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

- Другими словами, маргинальные вероятномти являются суммами по соответствующей строке или столбцу в таблице совместного распределения:

	$Y = y_1$	...	$Y = y_m$
$X = x_1$	$P(\{X = x_1, Y = y_1\})$	...	$P(\{X = x_1, Y = y_m\})$
...	...	...	...
$X = x_n$	$P(\{X = x_n, Y = y_1\})$	...	$P(\{X = x_n, Y = y_m\})$

Условная функция вероятности

- В многомерном мире мы также можем исследовать вопросы следующего вида: $P(X = x_i | Y = y_j)$
- Мы называем это еще одной функцией вероятности - **условной функцией вероятности**
- Напомним: условная вероятность - это своего рода параметризованная функция, где событие-условие служит параметром. Функции $P(X|A)$ и $P(X|B)$, $A \neq B$, являются разными функциями!
- Применяя определение условной вероятности:

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}{P(Y = y_j)} = \frac{P(\{X = x_i, Y = y_j\})}{P(Y = y_j)}$$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}{P(X = x_i)} = \frac{P(\{X = x_i, Y = y_j\})}{P(X = x_i)}$$

Независимость случайных величин

Напоминание: независимые события

- Независимость пары событий:

$$P(A) = P(A|B), \quad P(B) = P(B|A)$$

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \to P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- В концепции случайных величин эта идея поднимается на новый уровень: мы будем говорить не о независимости отдельных событий, а о независимости двух (или более) случайных величин, то есть независимость случайных экспериментов друг от друга.

Независимость случайных величин

- Рассмотрим каждую возможную пару событий:

- $\{X = x_1\}$
- $\{X = x_2\}$
- ...
- $\{X = x_n\}$

- $\{Y = y_1\}$
- $\{Y = y_2\}$
- ...
- $\{Y = y_m\}$

Definition

Если каждая пара $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ оказываются независимыми событиями, то мы говорим, что случайные величины X и Y независимы.

$$\forall x_i,\ \forall y_j:\ P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(\{X = x_i, Y = y_j\}).$$

Обратите внимание

Событие $\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}$ содержит ровно один элементарный исход - пару $\{(x_i, y_j)\}$

Независимость случайных величин

Пример

Совместная функция вероятности X и Y задана следующим образом:

	$Y=1$	$Y=2$
$X=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$X=2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

1. Найдите маргинальные функции вероятности для каждой случайной величины.
2. Вычислите условную функцию вероятности X при условии $Y=i$, $i=1,2$.
3. Независимы ли X и Y?

Независимость случайных величин

Решение

1. Маргинальные функции вероятности

Для X:

$$P(X=1)=\sum_{j=1}^{2}P(X=1,Y=j)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=\sum_{j=1}^{2}P(X=2,Y=j)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

Для Y:

$$P(Y=1)=\sum_{i=1}^{2}P(X=i,Y=1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

$$P(Y=2)=\sum_{i=1}^{2}P(X=i,Y=2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

Независимость случайных величин

Решение

2. Условные функции вероятности

$P(X|Y=1)$:

$$P(X=1|Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2|Y=1) = \frac{P(X=2, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$P(X|Y=2)$:

$$P(X=1|Y=2) = \frac{P(X=1, Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=2|Y=2) = \frac{P(X=2, Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Независимость случайных величин

Решение

3. Проверка независимости

Проверим условие независимости для пары:

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{8} \quad \text{и} \quad P(X=1)P(Y=1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32} \neq \frac{1}{8}$$

Вывод: X **и** Y **не независимы**.

Функции от многомерных случайных величин

- Мы обсуждали идею, что функция от случайной величины сама является случайной величиной, т.е. $W = g(X)$.
- Функция может быть от более чем одной переменной, и теперь мы можем получить $W = f(X, Y)$.
- Как и в случае с одной переменной, мы можем захотеть предсказать $E[W] = E[f(X, Y)]$.
- Напомним:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i)$$

- В новом случае:

$$E[g(X, Y)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

Пример

Совместная функция вероятности X и Y задана следующим образом:

	$Y=1$	$Y=2$
$X=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$X=2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

Рассмотрим функции $W=XY$, $G=X-Y$. Найдите их функции вероятности и математические ожидания.

Решение

Найти математическое ожидание $E[XY]$

Вариант 1: Через распределение новой случайной величины

Сначала найдем распределение $W = XY$:

- $W = 1$: когда $(X = 1, Y = 1)$, $P(W = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{8}$
- $W = 2$: когда $(X = 1, Y = 2)$ или $(X = 2, Y = 1)$, $P(W = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $W = 4$: когда $(X = 2, Y = 2)$, $P(W = 4) = P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{2}$
- Теперь вычислим математическое ожидание:

$$E[XY] = E[W] = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{6}{8} + \frac{4}{2} = \frac{23}{8}$$

Функции от многомерных случайных величин

Решение

Вариант 2: Используя формулу непосредственного подсчета

Используем знание, что новая случайная величина W является функцией от случайного вектора (X, Y), такая что: $W = f(X, Y) = XY$.

$$E[W] = E[f(X,Y)] = \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$E[W] = E[f(X,Y)] = E[XY] = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{8}$$

Ответ: $E[XY] = \frac{23}{8} = 2.875$

Функции от многомерных случайных величин

Решение

Найти математическое ожидание $E[X-Y]$

Вариант 1: Через распределение новой случайной величины

Сначала найдем распределение $G = X - Y$:

- $G = -1$: когда $(X = 1, Y = 2)$, $P(G = -1) = P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{4}$
- $G = 0$: когда $(X = 1, Y = 1)$ и $(X = 2, Y = 2)$,
  $P(G = 0) = P\left(\{(X = 1, Y = 1), (X = 2, Y = 2)\}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$
- $G = 1$: когда $(X = 2, Y = 1)$, $P(G = 1) = P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{8}$
- Теперь вычислим математическое ожидание:

$$E[X-Y] = E[G] = 0 \cdot \frac{5}{8} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

Решение

Вариант 2: Используя формулу непосредственного подсчета

Используем знание, что новая случайная величина G является функцией от случайного вектора (X, Y), такая что: $G = f(X, Y) = X - Y$.

$$E[G] = E[f(X,Y)] = \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (x_i - y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$E[X - Y] = E[G] = (1-1) \cdot \frac{1}{8} + (1-2) \cdot \frac{1}{4} + (2-1) \cdot \frac{1}{8} + (2-2) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

Ответ: $E[X - Y] = -\frac{1}{8} = -0.125$