

Теория вероятностей и математическая статистика
Случайные величины. Биномиальное распределение. Практическая сессия.

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

Пример 1

В урне находятся 2 черных и 5 белых шаров. Вы случайным образом выбираете 3 из них. X — это количество черных шаров в вашей выборке. Найдите математическое ожидание и дисперсию X .

Слайд для записей

Пример 2

Цены на акции компаний А, В и С растут независимо друг от друга с вероятностями 0.3, 0.4 и 0.8 соответственно. Пусть X – число тех компаний среди этих трех, чьи акции выросли.

1. Постройте ряд распределения, найдите математическое ожидание и стандартное отклонение.
2. Найдите вероятность того, что X отклонится от своего математического ожидания более чем на одно стандартное отклонение.

Слайд для записей

Пример 3

Пусть X - дискретная случайная величина с $E[X] = a$ и $Var[X] = b^2 \neq 0$. Мы строим новую случайную величину, которая является функцией от X :

$$Y = g(X) = \frac{X - a}{b}$$

Найдите $E[Y]$ и $Var[Y]$.

Слайд для записей

Пример 3

Решение

Пусть X - дискретная случайная величина с $E[X] = a$ и $Var[X] = b^2 \neq 0$. Мы строим новую случайную величину, которая является функцией от X :

$$Y = g(X) = \frac{X - a}{b}$$

Найдите $E[Y]$ и $Var[Y]$.

Решение.

$$E[Y] = E\left[\frac{X - a}{b}\right] = E\left[\frac{X}{b} + \frac{-a}{b}\right] = \frac{1}{b}E[X] - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0$$

$$Var[Y] = Var\left[\frac{X - a}{b}\right] = Var\left[\frac{X}{b} + \frac{-a}{b}\right] = \frac{1}{b^2}Var[X] = \frac{b^2}{b^2} = 1$$

Распределение Бернулли

Начнем с простейшего случая - **одного случайного эксперимента** с двумя возможными исходами.

i Definition

Распределение Бернулли - это распределение случайной величины X , которая принимает только два значения:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p \text{ ("успех")} \\ 0 & \text{с вероятностью } q = 1 - p \text{ ("неудача")} \end{cases}$$

Обозначается как $X \sim \text{Bern}(p)$, где $p \in [0, 1]$ - параметр распределения.

Характеристики распределения Бернулли

💡 Основные характеристики

Для случайной величины $X \sim \text{Bern}(p)$:

- Математическое ожидание:

$$E[X] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

- Дисперсия:

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

- Стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{p(1 - p)}$$

Примеры распределения Бернулли

1. **Подбрасывание монеты:** "Орел" = 1, "Решка" = 0, $p = 0.5$ (для честной монеты)
2. **Производственный контроль:** "Дефектное изделие" = 1, "Качественное" = 0
3. **Медицинский тест:** "Положительный результат" = 1, "Отрицательный" = 0
4. **Маркетинг:** "Покупка товара" = 1, "Отказ от покупки" = 0

От одного испытания к процессу

- Что если мы хотим провести несколько независимых испытаний Бернулли?
- Например: подбросить монету 10 раз, проверить 100 изделий на дефекты, провести 50 медицинских тестов.
- Это приводит нас к понятию процесса Бернулли - последовательности независимых испытаний Бернулли.

Процесс Бернулли

i Definition

Процесс Бернулли - это последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , где каждая $X_i \sim \text{Bern}(p)$:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p \text{ ("успех")} \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - p \text{ ("неудача")} \end{cases}$$

Ключевое отличие от одного испытания: теперь у нас есть **последовательность** результатов.

Свойства процесса Бернулли

1. **Независимость:** Результат каждого испытания X_i не зависит от результатов других испытаний
2. **Два исхода:** Каждое испытание может закончиться только успехом (1) или неудачей (0)
3. **Постоянная вероятность:** Вероятность успеха p не изменяется от испытания к испытанию

Примеры процесса Бернулли

1. **Серия подбрасываний монеты:** Последовательность $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ для 10 подбрасываний
2. **Контроль качества:** Проверка партии из n изделий, где каждое может быть дефектным независимо от других
3. **Клинические испытания:** Тестирование лекарства на n пациентах, где каждый может показать положительную реакцию

Биномиальное распределение

- Теперь, когда у нас есть процесс Бернулли, возникает естественный вопрос: **“Сколько успехов мы получим в n испытаниях?”**

i Definition

Биномиальное распределение описывает количество успехов в n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p . Если X_1, X_2, \dots, X_n - процесс Бернулли с параметром p , то случайная величина:

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

имеет биномиальное распределение и обозначается $Y \sim Bin(n, p)$. Y может принимать значения $0, 1, 2, \dots, n$ (от 0 до n успехов).

Функция вероятности биномиального распределения

Вероятность получить ровно k успехов в n испытаниях:

$$P(Y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Интуиция формулы

- p^k - вероятность k успехов
- $(1 - p)^{n-k}$ - вероятность $(n - k)$ неудач
- C_n^k - количество способов выбрать k позиций из n для размещения успехов

Характеристики биномиального распределения

💡 Основные характеристики

Для случайной величины $Y \sim \text{Bin}(n, p)$:

Математическое ожидание:

$$E[Y] = np$$

Дисперсия:

$$\text{Var}[Y] = np(1 - p)$$

Стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$$

Вывод математического ожидания:

$$E[Y] = E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] = p + p + \dots + p = np$$

Визуализация биномиального распределения

Форма биномиального распределения зависит от параметров n и p . Рассмотрим, как влияет значение p на распределение при фиксированном $n = 20$:

Сравнение различных значений p

Функция вероятности биномиального распределения
 $n = 20$ испытаний

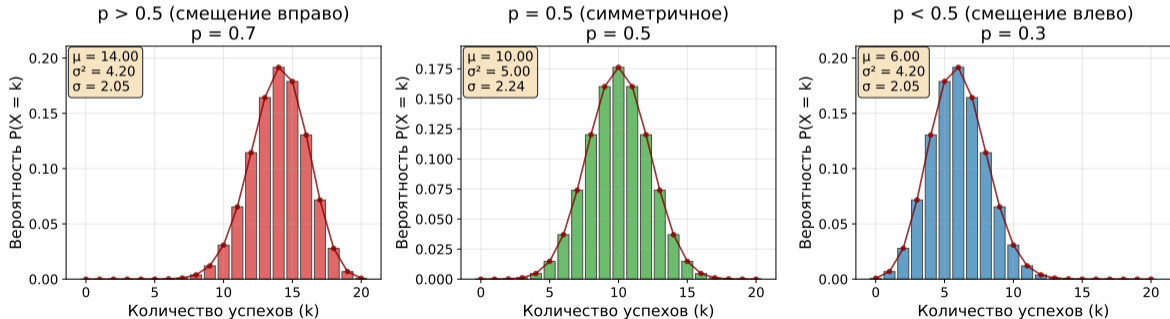


Рис. 1: Сравнение биномиального распределения для разных значений p

Визуализация биномиального распределения

i Наблюдения

$p < 0.5$ (например, $p = 0.3$): Распределение смещено влево, большинство значений сосредоточено в области малых k

$p = 0.5$: Распределение симметрично относительно среднего значения

$p > 0.5$ (например, $p = 0.7$): Распределение смещено вправо, большинство значений сосредоточено в области больших k

Процесс Бернулли, биномиальное распределение

Пример 1: подбрасывание монеты

Подбросим честную монету 10 раз. Какова вероятность получить ровно 6 орлов?

- $n = 10$, $p = 0.5$, $k = 6$, $Y \sim \text{Bin}(10, 0.5)$

$$\begin{aligned} P(Y = 6) &= C_{10}^6 (0.5)^6 (0.5)^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} (0.5)^{10} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{1024} = 210 \cdot \frac{1}{1024} \approx 0.205 \end{aligned}$$

Ожидаемое количество орлов: $E[Y] = 10 \cdot 0.5 = 5$

Процесс Бернулли, биномиальное распределение

Пример 2

Инвестор владеет акциями 7 предприятий одной отрасли. Известно, что вероятность роста цены акций по каждому из предприятий равна 0.4, вероятность падения равна 0.3. (будем считать, что акции ведут себя независимо)

1. Найти вероятность того, что изменится цена акций шести предприятий.
2. Найти вероятность того, цена акций вырастет более чем у двух предприятий.

Слайд для записей

Процесс Бернулли, биномиальное распределение

Пример 3

В команде 10 хороших стрелков, попадающих в цель при одном выстреле с вероятностью 0.8, и 3 плохих, попадающих с вероятностью 0.5. Один стрелок производит 5 выстрелов. Чему равна вероятность того, что это хороший стрелок, если он попал более двух раз?

Слайд для записей