Теория вероятностей и математическая статистика

Характеристики непрерывных случайных величин.

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

Пример: анализ функции плотности

- Пусть функция плотности случайной величины X задана в виде:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx^2, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найдите нормировочную константу, постройте функцию распределения, посчитайте вероятности $P(-5 < X < 2)$, $P(X > 1)$.

- Проверяем выполнение условия нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f_X(x)dx + \int\limits_{0}^{3} f_X(x)dx + \int\limits_{3}^{+\infty} f_X(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{3} cx^2dx + \int\limits_{3}^{+\infty} 0\,dx = 1$$

$$c\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9c = 1 \longrightarrow c = \frac{1}{9}$$

Пример: анализ функции плотности

- Используем формальное определение функции распределения: $F_X(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$
- Рассматриваем так же три области. Первая область $\forall x < 0$. Мы знаем, что функция плотности в этой области равна нулю.

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

- Вторая область $\forall x \in [0,\,3]$. Знаем, что на этом интервале у функции плотности определенный вид, плюс не забудем, что мы еще ранее нашли нормировочную константу.

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int\limits_{0}^{x} f_X(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{x} \frac{1t^2}{9}dt = 0 + \frac{t^3}{27}\Big|_0^x = \frac{x^3}{27}$$

- Третья область $\forall x > 3$:

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int\limits_{0}^{3} f_X(t)dt + \int\limits_{3}^{x} f_X(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{3} \frac{1t^2}{9}dt + \int\limits_{3}^{x} 0\,dt = 1$$

Пример: анализ функции плотности

- Финально, корректная запись функции распределения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{27}, & 0 \le x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

- Посчитаем вероятности через основное определение и через функцию распределения и сравним результаты.

$$P(-5 < X < 2) = \int\limits_{-5}^{2} f_X(x)dx = \int\limits_{-5}^{0} f_X(x)dx + \int\limits_{0}^{2} f_X(x)dx = \int\limits_{-5}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{1x^2}{9}dx = \frac{x^3}{27}\Big|_0^2 = \frac{8}{27}$$

$$P(-5 < X < 2) = F_X(2) - F_X(-5) = \frac{8}{27} - 0$$

$$P(X > 1) = \int\limits_{1}^{+\infty} f_X(x)dx = \int\limits_{1}^{3} f_X(x)dx + \int\limits_{3}^{+\infty} f_X(x)dx = \int\limits_{1}^{3} \frac{1x^2}{9}dx + \int\limits_{3}^{+\infty} 0\,dx = \frac{x^3}{27}\Big|_1^3 = \frac{26}{27}$$

$$P(X > 1) = F_X(+\infty) - F_X(1) = 1 - \frac{1}{27}$$

Математическое ожидание

- Напомним, что для дискретной СВ мы вычисляем математическое ожидание как 'взвешенную сумму':

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i), \text{ вычисляется для } \forall x_i \in \Omega_X.$$

- Если у нас есть другая СВ G, являющаяся функцией от X: $G = g(X)$:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i)$$

- Для непрерывного случая мы заменяем сумму на интеграл:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x)dx \qquad \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \, P(X = x_i) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, f_X(x)dx$$

- Финально:

$$\boxed{E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx} \qquad \boxed{E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)dx}$$

Дисперсия

- Формула для дисперсии остается той же:

$$Var[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E[X^2] - (E[X])^2$$

- Напомним доказательство:

$$Var[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] =$$
$$E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Пример

Пусть функция $f(x)$ задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. Найдите корректное значение нормировочной константы c, так что $f(x)$ может быть функцией плотности случайной величины X.
2. Учитывая полученную константу, найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.