

ФКН МНаД: ТВиМС 2026.

Лист задач для самостоятельного решения #8.

Выборочные распределения.

Ответы и решения.

1. Предположим, что случайная выборка размера $n = 64$ берется из случайного процесса с математическим ожиданием $\mu = 40$ и стандартным отклонением $\sigma = 5$.

- (a) Каковы математическое ожидание и стандартное отклонение выборочного распределения $\bar{X}$? Опишите форму выборочного распределения.
(b) Какова приближённая вероятность того, что $\bar{X}$ будет находиться в пределах 0.5 от истинного математического ожидания μ ?
(c) Какова приближённая вероятность того, что $\bar{X}$ будет отличаться от μ более чем на 0.7?

Решение:

- (a) $n = 64$, $\mu = 40$, $\sigma = 5$. Для выборочного среднего $\bar{X}$:

$$E[\bar{X}] = \mu = 40, \quad SD[\bar{X}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.625.$$

Так как $n \geq 30$, по ЦПТ: $\bar{X} \sim \mathcal{N}(40, 0.625^2)$.

- (b) $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.5) = P(39.5 \leq \bar{X} \leq 40.5)$. Стандартизируем $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$P(39.5 \leq \bar{X} \leq 40.5) = P(-0.8 \leq Z \leq 0.8) \approx 0.576.$$

- (c) $P(|\bar{X} - \mu| > 0.7) = 1 - P(39.3 \leq \bar{X} \leq 40.7) = 1 - P(-1.12 \leq Z \leq 1.12) \approx 0.263$.

2. Предположим, что $X_i \sim \mathcal{N}(0, 9)$, и у нас есть случайная выборка $X_1, \dots, X_5$. Найдите значение константы c в каждом из следующих случаев:

- (a) $P(X_1 + 2X_2 > 9) = c$,
(b) $P(|\bar{X}| < c) = 0.4$.

Решение:

- (a) $X_i \sim \mathcal{N}(0, 9)$, то есть $\mu = 0$, $\sigma^2 = 9$. Величины X_1 и X_2 независимы.

Линейная комбинация независимых нормальных случайных величин снова нормальна:

$$X_1 + 2X_2 \sim \mathcal{N}(0, \text{Var}[X_1] + 4 \text{Var}[X_2]) = \mathcal{N}(0, 45).$$

Стандартизируем и находим c :

$$c = P(X_1 + 2X_2 > 9) = P\left(Z > \frac{9}{\sqrt{45}}\right) = P(Z > 1.34) \approx 0.09.$$

- (b) Так как X_i нормальны, выборочное среднее $\bar{X}$ распределено точно (не только приближённо):

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right) = \mathcal{N}\left(0, \frac{9}{5}\right), \quad SD[\bar{X}] = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1.34.$$

Событие $|\bar{X}| < c$ означает $-c < \bar{X} < c$. Стандартизируем, положив $a = c/SD[\bar{X}]$:

$$P(|\bar{X}| < c) = P(-a < Z < a).$$

Так как Z симметрична относительно нуля,

$$P(-a < Z < a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1 = 0.4 \quad \Rightarrow \quad \Phi(a) = 0.7.$$

По таблице $a = z_{0.7} \approx 0.52$, откуда $c = a \cdot SD[\bar{X}] \approx 0.52 \cdot 1.34 \approx 0.70$.

3. Предположим, что имеется случайная выборка из двух независимых случайных величин X_1, X_2 из распределения $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Рассмотрим следующую выборочную статистику:

$$W = \frac{X_1^2 + X_2^2}{2}.$$

Докажите, что $E[W] = \sigma^2$.

Подсказка: тут активно используется дисперсия по определению: $\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$.

Решение:

$X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, значит $E[X_i] = 0$ и $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$. По определению дисперсии:

$$E[X_i^2] = \text{Var}[X_i] + (E[X_i])^2 = \sigma^2.$$

По линейности математического ожидания:

$$E[W] = E\left[\frac{X_1^2 + X_2^2}{2}\right] = \frac{1}{2}(E[X_1^2] + E[X_2^2]) = \frac{1}{2}(\sigma^2 + \sigma^2) = \sigma^2.$$

4. Баллы за тест на вербальное мышление распределены нормально с математическим ожиданием $\mu = 100$ и стандартным отклонением $\sigma = 10$.

- (а) Какова вероятность того, что случайно выбранный человек наберёт не менее 105 баллов?
 (б) Выбрана случайная выборка размера $n = 20$. Какова вероятность того, что выборочное среднее окажется между 97 и 104? (Можно использовать ближайшие значения из статистических таблиц.)

Решение:

- (а) Баллы одного человека $X \sim \mathcal{N}(100, 10^2)$. Тогда

$$P(X \geq 105) = P\left(Z \geq \frac{105 - 100}{10}\right) = P(Z \geq 0.5) \approx 0.31.$$

- (б) $n = 20$. Так как X_i нормальны, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(100, 10^2/20)$, $\text{SD}[\bar{X}] = 10/\sqrt{20} \approx 2.24$. Стандартизируем:

$$P(97 \leq \bar{X} \leq 104) = P(-1.34 \leq Z \leq 1.79) \approx 0.87.$$

5. Производственный процесс предназначен для изготовления деталей диаметром 0.5 дюйма. Каждый день выбирается случайная выборка из 36 деталей и записываются их диаметры. Если полученное выборочное среднее меньше 0.49 дюйма или больше 0.51 дюйма, процесс останавливается для настройки. Стандартное отклонение диаметра составляет 0.02 дюйма. Какова вероятность того, что производственная линия будет остановлена без необходимости?

Решение:

Пусть $\mathcal{X} = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка с $\mu = 0.5$, $\sigma = 0.02$, $n = 36$.

Процесс останавливается, если $\bar{X} < 0.49$ или $\bar{X} > 0.51$. При правильной работе процесса ($\mu = 0.5$) это ложная тревога.

По ЦПТ (так как $n = 36 \geq 30$): $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(0.5, \frac{0.02^2}{36}\right)$.

$$P(\bar{X} < 0.49 \text{ или } \bar{X} > 0.51) = P(\bar{X} < 0.49) + P(\bar{X} > 0.51).$$

Стандартизируем: $Z = \frac{\bar{X} - 0.5}{0.02/\sqrt{36}} = \frac{\bar{X} - 0.5}{0.00333} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$$P(\bar{X} < 0.49) = P\left(Z < \frac{0.49 - 0.5}{0.00333}\right) = P(Z < -3) \approx 0.00135.$$

$$P(\bar{X} > 0.51) = P\left(Z > \frac{0.51 - 0.5}{0.00333}\right) = P(Z > 3) \approx 0.00135.$$

Итого: $P(\text{остановка}) \approx 0.0027$.

6. Сообщается, что в крупном исследовании, проведённом в штате Нью-Йорк, примерно 30% участников исследования жили в пределах 1 мили от опасного места захоронения отходов. Пусть p обозначает долю всех жителей Нью-Йорка, которые живут в пределах 1 мили от такого места, и предположим, что $p = 0.3$.
- Каковы математическое ожидание и стандартное отклонение выборочной доли $\hat{p}$ на основе случайной выборки размера $n = 400$?
 - При $n = 400$ чему равно $P(0.25 \leq \hat{p} \leq 0.35)$?
 - Будет ли вероятность, вычисленная в предыдущем пункте, больше или меньше, чем в случае, если $n = 500$?

Решение:

- Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из распределения Бернулли с $P(X_i = 1) = p = 0.3$, $n = 400$.

Выборочная доля: $\hat{p} = \frac{Y}{n}$, где $Y = \sum_{i=1}^n X_i$.

Характеристики: $E[\hat{p}] = p = 0.3$, $\text{Var}[\hat{p}] = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0.3 \cdot 0.7}{400} = 0.000525$.

$\text{SD}[\hat{p}] = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{0.000525}$.

- По интегральной теореме Муавра-Лапласа (случай Центральной Предельной Теоремы для случайных величин Бернулли):

$$\hat{p} \sim \mathcal{N}\left(0.3, \frac{0.3 \cdot 0.7}{400}\right)$$

Стандартизируем: $Z = \frac{\hat{p} - 0.3}{\frac{0.3 \cdot 0.7}{400}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$P(0.25 \leq \hat{p} \leq 0.35) = P\left(\frac{0.25 - 0.3}{\frac{0.3 \cdot 0.7}{400}} \leq Z \leq \frac{0.35 - 0.3}{\frac{0.3 \cdot 0.7}{400}}\right) = P(-2.18 \leq Z \leq 2.18) = 2\Phi(2.18) - 1 \approx 0.971$.

- При $n = 500$: $\text{SD}[\hat{p}] = \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{500}} \approx 0.0205$.

$P(0.25 \leq \hat{p} \leq 0.35) = P\left(\frac{0.25 - 0.3}{0.0205} \leq Z \leq \frac{0.35 - 0.3}{0.0205}\right) = P(-2.44 \leq Z \leq 2.44) = 2\Phi(2.44) - 1 \approx 0.985$.

При увеличении n дисперсия $\hat{p}$ уменьшается, поэтому вероятность попадания в тот же интервал увеличивается.

7. Производитель компьютерных принтеров закупает пластиковые картриджи с чернилами у поставщика. Когда поступает крупная партия, выбирается случайная выборка из 200 картриджей, и каждый картридж проверяется. Если выборочная доля бракованных картриджей больше 0.02, вся партия возвращается поставщику.

- Какова приближённая вероятность того, что партия будет возвращена, если истинная вероятность брака картриджа равна 0.05?
- Какова приближённая вероятность того, что партия не будет возвращена, если истинная вероятность брака картриджа равна 0.10?

Решение:

- Пусть $X_1, \dots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с $P(X_i = 1) = p = 0.05$, $n = 200$. Выборочная доля брака $\hat{p}$; по ИТМЛ:

$$\hat{p} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) = \mathcal{N}(0.05, 0.0002375).$$

Партия возвращается, если $\hat{p} > 0.02$. Стандартизируем:

$$P(\hat{p} > 0.02) = P(Z > -1.95) \approx 0.97.$$

- Теперь меняется вероятность брака, размер выборки остается прежним: $p = 0.10$, $n = 200$. Аналогично $\hat{p} \sim \mathcal{N}(0.10, 0.00045)$. Партия не возвращается, если $\hat{p} \leq 0.02$:

$$P(\hat{p} \leq 0.02) = P(Z \leq -3.77) \approx 0.0001.$$

8. Кабельная компания решает, стоит ли заменить канал 'магазин на диване' новой местной телепрограммой. Будет проведён опрос 100 абонентов. Кабельная компания решила оставить канал 'магазин на диване', если выборочная доля окажется больше 0.25. Какова приближённая вероятность того, что кабельная компания все-таки его оставит, если истинная доля тех, кто его смотрит, составляет только 0.20?

Решение:

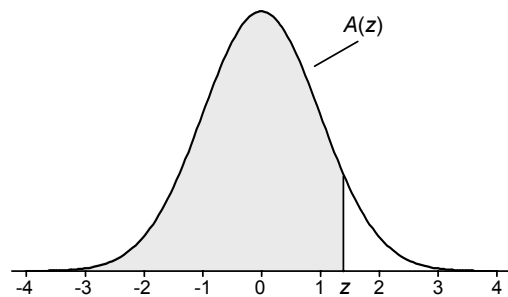
Пусть $X_1, \dots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с $P(X_i = 1) = p = 0.20$, $n = 100$.

По ИТМЛ: $\hat{p} \sim \mathcal{N}\left(0.20, \frac{0.20 \cdot 0.80}{100}\right) = \mathcal{N}(0.20, 0.0016)$.

Канал оставляют, если $\hat{p} > 0.25$.

$$P(\hat{p} > 0.25) = P\left(\frac{\hat{p} - 0.20}{\sqrt{0.0016}} > \frac{0.25 - 0.20}{\sqrt{0.0016}}\right) = P(Z > 1.25) = 1 - \Phi(1.25) \approx 0.106$$

Cumulative Standardized Normal Distribution



$A(z)$ is the integral of the standardized normal distribution from $-\infty$ to z (in other words, the area under the curve to the left of z). It gives the probability of a normal random variable not being more than z standard deviations above its mean. Values of z of particular importance:

z	$A(z)$	
1.645	0.9500	Lower limit of right 5% tail
1.960	0.9750	Lower limit of right 2.5% tail
2.326	0.9900	Lower limit of right 1% tail
2.576	0.9950	Lower limit of right 0.5% tail
3.090	0.9990	Lower limit of right 0.1% tail
3.291	0.9995	Lower limit of right 0.05% tail

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999							