ФКН МНаД: ТВиМС 2026.
Лист задач для самостоятельного решения #5.
Многомерные дискретные случайные величины.
Ковариация и корреляция.
Ответы и решения.

1. Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей

	$X=-2$	$X=0$	$X=2$
$Y=1$	0.2	0.3	0.1
$Y=2$	0.1	0.2	a

   (a) Найдите неизвестную вероятность a.

   (b) Проверьте, являются ли X и Y независимыми,

   (c) Найдите вероятности $P(X > -1), P(X > Y)$

   (d) Найдите условную функцию вероятности для X при условии $Y = 2$: $P(x|Y = 2)$, и для Y при условии $X = 0$: $P(y|X = 0)$,

   (e) Найдите корреляцию $\text{Corr}(X, Y)$

2. Пусть R — новая случайная величина, $R = X^2 + Y^2$, где X и Y имеют следующее совместное распределение:

$X \setminus Y$	0	2	4
0	0.1	0.1	0
2	0.1	0.4	0.1
4	0	0.1	0.1

   (a) Найдите маргинальные распределения и проверьте, являются ли X и Y независимыми.

   (b) Найдите ковариацию и корреляцию между X и Y.

   (c) Найдите $E[R]$ следующим способом: сначала найдите функцию вероятности для новой случайной величины R (которая теперь является обычной одномерной) $P(R = r_i)$, затем используйте формулу математического ожидания для такой случайной величины.

   (d) Найдите $E[R]$ по формуле $E[g(X, Y)] = \sum\sum g(x, y)P(X = x, Y = y)$. Сравните результат с полученным ранее.

   (e) Найдите следующие математические ожидания любым удобным способом:

      i. $E[(X - 2)(Y - 2)]$,

      ii. $E[(X - 3)^2]$,

      iii. $E[4X + 2Y]$.

   Ответ.

   Технический пример, иллюстрирующий равноправность различных подходов к вычислению математического ожидания функции от многомерной случайной величины.

   Последний вопрос может быть разрешен, используя свойство линейности математического ожидания.

$$E[(X-2)(Y-2)] = E[XY - 2X - 2Y + 4] = E[XY] - 2E[X] - 2E[Y] + 4$$
$$E[(X-3)^2] = E[X^2 - 6X + 9] = E[X^2] - 6E[X] + 9$$
$$E[4X + 2Y] = 4E[X] + 2E[Y]$$

3. Простая показательная задача, важная на будущее

Случайный эксперимент состоит в независимом броске пары шестигранных кубиков. Пусть случайные величины X и Y обозначают числа, выпавшие на этих кубиках. Рассмотрим новую случайную величину W, которая является функцией от X и Y, $W = g(X, Y) = X + Y$.

Постройте функцию вероятности (таблицу / ряд распределения) новой случайной величины W. Обратите внимание на получившиеся значения, на каких значениях W она достигает максимума, а на каких минимума.

Ответ.

Очередная иллюстрация идеи о том, что функция от случайной величины сама по себе является случайной величиной с новым распределением. Функция может быть не только от одной переменной, но и от двух, и более.

Функцию вероятности для новой случайной величины можно получить, зная функцию вероятности аргументов и функцию, которая связывает аргументы и новую случайную величину.

$$P_W(W=2) = P(X=1, Y=1) = \frac{1}{36},$$
$$P_W(W=3) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1) = \frac{2}{36},$$
$$P_W(W=4) = P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=1) = \frac{3}{36},$$
$$P_W(W=5) = P(X=1, Y=4) + P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=2) + P(X=4, Y=1) = \frac{4}{36},$$
$$P_W(W=6) = P(X=1, Y=5) + P(X=2, Y=4) + P(X=3, Y=3) + P(X=4, Y=2) + P(X=5, Y=1) = \frac{5}{36},$$
$$P_W(W=7) = P_{X,\,Y}\left(\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}\right) = \ldots = \frac{6}{36},$$

Далее продолжаем аналогично. В итоге получаем таблицу:

w	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_W(w)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Здесь важно заметить, как центральные значения получают наибольшие вероятности, а а значения на краях — наименьшие вероятности. Объяснение такому эффекту легко наблюдается на этом примере и состоит в том, что к центральным значениям приводит большее количество изначальных элементарных исходов (пар), чем к значениям на краях.

4. Пусть известно совместное распределение случайных величин X и Y:

	$Y=3$	$Y=-3$
$X=-1$	$\frac{3}{4}$	0
$X=2$	0	$\frac{1}{4}$

   (a) Найдите маргинальные функции вероятности для X и Y.

   (b) Независимы ли X и Y?

   (c) Найдите ковариацию (и корреляцию) между X и Y.

   Ответ.

5. Показательная задача. Нарисуйте на тригонометрической окружности точки, соответствующие всем возможным парам (X, Y). Обратите внимание, какую структуру получают точки и что там нет никакого превалирующего линейного направления. Это хорошая иллюстрация того, что корреляция показывает силу именно линейной зависимости, а не какой-либо другой. То есть, зависимость между переменными может быть совершенно не по линейному закону, и тогда вполне возможно, что корреляция окажется равной или близкой к нулю.

   Пусть известно распределение случайной величины U:

U	$u_1=0$	$u_2=\pi/3$	$\dots$	$u_6=5\pi/3$
P_U	$\frac{1}{6}$	$\dots$	$\dots$	$\frac{1}{6}$

   (a) Введём переменные $X=\cos U$ и $Y=\sin U$. Постройте таблицу их совместного распределения.

   (b) Являются ли они зависимыми? Рассмотрите, например, $P(X=\frac{1}{2})$ и $P(X=\frac{1}{2} \mid Y=\frac{\sqrt{3}}{2})$.

   (c) Найдите математические ожидания $E[X]$ и $E[Y]$.

   (d) Найдите ковариацию и корреляцию между X и Y.

   Ответ.

   На основе информации о распределении случайной величины U можно построить таблицу совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \setminus Y$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
-1	0	$\frac{1}{6}$	0
$-\dfrac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
$\dfrac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{6}$	0

   Проверить независимость можно по-разному. Например, если найдем, что хотя бы для одной пары не выполняется свойство про умножение вероятностей, то величины зависимы.

$$P_X(X=1)\cdot P_Y\left(Y=\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \stackrel{?}{\equiv} P\left(X=1, Y=\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} \neq 0$$

   Величины зависимы.

   В итоге окажется, что ковариация и корреляция равны нулю.

6. Пусть случайная величина X имеет распределение:

$$P\{X=-1\} = P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{3},$$

   а Y задаётся соотношением:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{если } X = 0 \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Проверьте, являются ли X и Y независимыми. Найдите ковариацию между X и Y.

Ответ.

Несмотря на хитрую форму записи, надо в первую очередь восстановить таблицу совместного распределения.

$X \setminus Y$	0	1
-1	0	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0
1	0	$\frac{1}{3}$

Проверка независимости:

$$P_X(X=1) \cdot P_Y(Y=1) \stackrel{?}{\equiv} P\left(X=1, Y=1\right),$$
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \neq \frac{1}{3}$$

Величины зависимы.

Ковариация снова окажется равной нулю. Еще один раз пример того, что нулевая ковариация не означает независимость.

7. Случайные величины U и V принимают значения ± 1. Их совместное распределение задано следующим образом:

$$P\{U=-1\} = P\{U=+1\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{V=+1 \mid U=+1\} = P\{V=-1 \mid U=-1\} = \frac{1}{3},$$
$$P\{V=-1 \mid U=+1\} = P\{V=+1 \mid U=-1\} = \frac{2}{3},$$

   (a) Найдите вероятность того, что уравнение $x^2 + Ux + V = 0$ имеет хотя бы один действительный корень.
   (b) Найдите вероятность того, что уравнение $x^2 + (U+V)x + (U+V) = 0$ имеет хотя бы один действительный корень.

8. В группе 5 мальчиков и 8 девочек. Из этой группы мы случайным образом выбираем троих учеников. Пусть X это количество мальчиков в выборке, а Y – количество девочек.

   (a) Построить таблицу совместного распределения

   (b) Найти математическое ожидание и дисперсию X и Y

   (c) Найти $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

   Ответ.

   Таблица совместного распределения:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	0	0	0	$\frac{C_5^0 C_8^3}{C_{13}^3}$
1	0	0	$\frac{C_5^1 C_8^2}{C_{13}^3}$	0
2	0	$\frac{C_5^2 C_8^1}{C_{13}^3}$	0	0
3	$\frac{C_5^3 C_8^0}{C_{13}^3}$	0	0	0

=

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	0	0	0	$\frac{28}{143}$
1	0	0	$\frac{70}{143}$	0
2	0	$\frac{40}{143}$	0	0
3	$\frac{5}{143}$	0	0	0

9. Мы обсуждали, что нулевая ковариация двух случайных величин в общем случае не означает их независимость. Однако существуют случаи, когда это может быть верно. В этой задаче предлагается немного поработать с теорией и разобрать один случай.

   Пусть X и Y — дискретные случайные величины, каждая из которых принимает ровно два различных значения. Докажите, что в этом частном случае X и Y независимы **тогда и только тогда**, когда $E[XY] = E[X]E[Y]$.

   Фраза «A тогда и только тогда, когда B» означает, что утверждение работает в обе стороны. Нужно доказать $A \to B$ и $B \to A$.

   Ответ.

   Разобрана на занятии.