ФКН МНаД: ТВиМС 2026.
Лист задач для самостоятельного решения #4.
Дискретные случайные величины.
Распределения Бернулли и биномиальное.
Ответы и решения.

1. Подбрасываются две монеты. Первая монета выпадает орлом с вероятностью 0.6, вторая с вероятностью 0.7. Предположим, что результаты подбрасываний независимы, и пусть случайная величина X обозначает общее количество выпавших орлов. Определите её множество элементарных исходов и значение функции вероятности от этих элементарных исходов, *i.e.* постройте распределение дискретной случайной величины.

   Ответ.

$$
\begin{aligned}
&P(X = 0) = (1 - 0.6)(1 - 0.7) = 0.12 \\
&P(X = 1) = 0.6 \cdot (1 - 0.7) + (1 - 0.6) \cdot 0.7 = 0.46 \\
&P(X = 2) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42
\end{aligned}
$$

2. Пусть распределение случайной величины X задано таблицей:

x	-2	-1	0	a	4
$p_X(x)$	0.4	0.2	p_1	0.1	p_2

   Найдите a, p_1 и p_2, если известно, что $E[X] = 0$ и $Var[X] = 5.4$.

   Ответ.

   $a = 2$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$.

3. Пусть распределение случайной величины X задано таблицей:

x	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

   Постройте распределение случайной величины $Y = X^2 + 10$.

   Ответ.

   Задача посвящана одной из главных идей: функция от случайной величины сама по себе является случайной величиной с новым распределением. Новую функцию вероятности можно выразить через старую известную $P_X(x)$.

$$
\begin{aligned}
&P_Y(Y = 10) = P_X(\{X = 0\}) = 0.1 \\
&P_Y(Y = 11) = P_X(\{X = 1\} \cup \{X = -1\}) = P_X(\{X = 1\}) + P_X(\{X = -1\}) = 0.3 \\
&P_Y(Y = 14) = P_X(\{X = 2\} \cup \{X = -2\}) = P_X(\{X = 2\}) + P_X(\{X = -2\}) = 0.3 \\
&P_Y(Y = 19) = P_X(\{X = 3\}) = 0.3
\end{aligned}
$$

4. Пусть X – дискретная случайная величина с функцией вероятности, заданной в следующем виде:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a}, \ x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \\ 0, \ \text{в противном случае} \end{cases}$$

   (a) Найдите корректное значение параметра a.

   (b) Учитывая найденное значение a, найдите характеристики случайной величины: $E[X]$ и $Var[X]$.

   (c) Постройте таблицу распределения случайной величины $W = g(X) = (X - E[X])^2$.

   (d) Используя предыдущий результат, найдите $E[W]$ по определению математического ожидания.

   (e) Вспомним идею нахождения матожидания случайной величины, которая является функцией от X:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P(X = x_i).$$

   Этот способ позволяет избежать непосредственного построения распределения W.
   Найдите дисперсию X, используя этот подход, принимая во внимание, что $Var[X] = E[(X - E[X])^2]$.

   (f) Найдите дисперсию X по формуле $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$.

   (g) Сравните результаты.

Ответ.

(a) Условие нормировки: $\sum\limits_x P(X = x) = \frac{1}{a}(9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9) = \frac{28}{a} = 1$, откуда $a = 28$.

Дальше - технический пример, иллюстрирующий равноправность различных подходов к вычислению математического ожидания и дисперсии.

5. В урне находятся 2 черных и 5 белых шаров. Вы случайным образом выбираете 3 из них. Пусть случайная величина X — это количество черных шаров в вашей выборке. Постройте распределение случайной величины X. Найдите математическое ожидание и дисперсию X.

Ответ.

- $X = 0$, означает 0 черных шаров в выборке. Вероятность этого события: $P(X = 0) = \frac{C_5^3}{C_7^3} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$
- $X = 1$, означает 1 черный шар в выборке. Вероятность этого события: $P(X = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_5^2}{C_7^3} = \frac{4}{7}$
- $X = 2$, означает 2 черных шара в выборке. Вероятность этого события: $P(X = 2) = \frac{C_2^2 \cdot C_5^1}{C_7^3} = \frac{1}{7}$

Можем построить таблицу функции вероятности (ряд распределения):

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Математическое ожидание: $E[X] = 0 + \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$

Дисперсия:

$$E[X^2] = 0 + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{8}{7} = \frac{56}{49}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{56}{49} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{56}{49} - \frac{36}{49} = \frac{20}{49}$$

6. В клубе 10 хороших стрелков и 3 плохих. На очередное соревнование случайным образом отбирается команда из трех человек.

   (a) Пусть случайная величина X – число плохих стрелков, попавших в команду. Для всех возможных значений X найдите значения функции вероятности $P_X(x)$, также посчитайте $E[X]$ и $Var[X]$.

   (b) Пусть случайная величина Y – число хороших стрелков, попавших в команду. Аналогично для всех возможных значений Y найдите значения функции вероятности $P_Y(y)$, и посчитайте $E[Y]$ и $Var[Y]$.

   (c) Сравните результаты.

   Ответ.

   Для первого вопроса ряд распределения случайной величины X задается следующей таблицей:

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	$\frac{C_3^0 C_{10}^3}{C_{13}^3}$	$\frac{C_3^1 C_{10}^2}{C_{13}^3}$	$\frac{C_3^2 C_{10}^1}{C_{13}^3}$	$\frac{C_3^3 C_{10}^0}{C_{13}^3}$

   Дальше по аналогии.

7. Цены на акции компаний A, B и C растут независимо друг от друга с вероятностями 0.3, 0.4 и 0.8 соответственно. Пусть случайная величина X – число тех компаний среди этих трех, чьи акции выросли.

   (a) Постройте распределение, найдите математическое ожидание и стандартное отклонение.

   (b) Найдите вероятность того, что X отклонится от своего математического ожидания более чем на одно стандартное отклонение.

   Ответ.

   Пусть A - событие, что цена акций компании A выросла, B - событие, что цена акций компании B выросла, C - событие, что цена акций компании C выросла.

   - $X = 0$, означает, что ни у одной компании не выросла цена акций. Вероятность:

   $$(1-0.3)(1-0.4)(1-0.8) = 0.084$$

   - $X = 1$, означает, что выросла цена акций только у одной компании. Событие: $\{\overline{AB}C, A\overline{BC}, \overline{A}B\overline{C}\}$. Вероятность: 0.428.
   - $X = 2$, означает, что выросла цена акций у двух компаний. Событие: $\{AB\overline{C}, \overline{A}BC, \overline{AB}C\}$. Вероятность: 0.392.
   - $X = 3$, означает, что выросла цена акций у всех трех компаний. Вероятность: $0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.8 = 0.096$.

8. Пусть X - дискретная случайная величина с $E[X] = a$ и $Var[X] = b^2 \neq 0$. Мы строим новую случайную величину, которая является функцией от X:

   $$Y = g(X) = \frac{X - a}{b}$$

   Найдите $E[Y]$ и $Var[Y]$.

   Ответ.

   Используя свойства математического ожидания и дисперсии, получаем:

   $$E[Y] = E\left[\frac{X-a}{b}\right] = E\left[\frac{X}{b} + \frac{-a}{b}\right] = \frac{1}{b}E[X] - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0$$
   $$Var[Y] = Var\left[\frac{X-a}{b}\right] = Var\left[\frac{X}{b} + \frac{-a}{b}\right] = \frac{1}{b^2}Var[X] = \frac{b^2}{b^2} = 1$$

9. Инвестор владеет акциями 7 предприятий одной отрасли. Известно, что вероятность роста цены акций по каждому из предприятий равна 0.4, вероятность падения равна 0.3. (будем считать, что акции ведут себя независимо)

   (a) Найти вероятность того, что изменится цена акций шести предприятий.
   (b) Найти вероятность того, цена акций вырастет более чем у двух предприятий.

   Ответ.

   (a) Спрашивают про изменение цены акции - это рост или падение, берем вероятность положительного исхода в эксперименте Бернулли: $p = 0.4 + 0.3 = 0.7$. Схема Бернулли $n = 7$, $k = 6$: $P = C_7^6 \cdot 0.7^6 \cdot 0.3^1 = 0.247$.
   (b) Здесь спрашивают именно про рост, здесь другой эксперимент Бернулли, берем вероятность положительного исхода: $p = 0.4$. Рост более чем у двух: $n = 7$, $p = 0.4$, $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} C_7^k \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{7-k} \approx 0.58$.

10. Подбрасывается кубик, а затем монетка подбрасывается столько раз, сколько очков выпало на кубике. Известно, что орел выпал ровно 4 раза. Какова вероятность того, что на кубике выпала «6»?

    Ответ.

    Из информации, что орел выпал ровно 4 раза, мы можем сделать вывод, что на кубике выпало как минимум 4 очка.

    Пусть случайная величина X - число очков на кубике, а случайная величина T - число орлов при подбрасывании монетки.

    Тогда вероятность того, что орел выпал ровно 4 раза, равна:

$$P(T = 4) = P(T = 4|X = 4)P(X = 4) + P(T = 4|X = 5)P(X = 5) + P(T = 4|X = 6)P(X = 6)$$

$$P(T = 4) = \left(C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6\right) \cdot \frac{1}{6}$$

$$P(T = 4) \approx 0.0755$$

    Искомая же вероятность $P(X = 6|T = 4)$ равна:

$$P(X = 6|T = 4) = \frac{P(T = 4|X = 6)P(X = 6)}{P(T = 4)}$$

$$P(X = 6|T = 4) = \frac{C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \frac{1}{6}}{0.0755} \approx 0.517$$

11. В гостинице 35 номеров. Управляющий знает, что клиент, забронировавший номер, с вероятностью 0.1 не приедет. Но на каждом пустом номере гостиница теряет деньги, так что управляющий бронирует номера для 38 клиентов, с запасом - «все равно кто-нибудь не приедет». Найти вероятность того, что у него возникнут проблемы – количество приехавших окажется больше количества номеров.

    Ответ.

    Процесс Бернулли с $n = 38$, $p = 0.9$, $k > 35$, $P(k > 35) = P(k = 36) + P(k = 37) + P(k = 38) = 0.254$. Очень похоже на overbooking в авиаперевозках.

12. В команде 10 хороших стрелков, попадающих в цель при одном выстреле с вероятностью 0.8, и 3 плохих, попадающих с вероятностью 0.5. Один стрелок производит 5 выстрелов. Чему равна вероятность того, что это хороший стрелок, если он попал более двух раз?

    Ответ.

    Пусть событие A заключается в том, что стрелок попал более двух раз, H_1– стрелял хороший стрелок, H_2 - стрелял плохой стрелок. В соответствии с этими обозначениями нас просят найти $P(H_1/A)$. Так как введенные гипотезы составляют полную группу событий, то мы можем использовать формулу Байеса. Найдем $P(A/H_1)$ - это схема Бернулли с $n = 5, p = 0.8, k > 2 \Rightarrow P(H_1) = P(3) + P(4) + P(5) = 0.942$, аналогично найдем $P(A/H_2)$ - это схема Бернулли с $n = 5, p = 0.5, k > 2 \Rightarrow P(H_2) = P(3)+P(4)+P(5) = 0.5$.

$$P(A) = \frac{P(A \mid H_1) \cdot P(H_1)}{P(A \mid H_1) \cdot P(H_1) + P(A \mid H_2) \cdot P(H_2)}$$

$$P(A) = \frac{0.942 \cdot \frac{10}{13}}{0.942 \cdot \frac{10}{13} + 0.5 \cdot \frac{3}{13}} \approx 0.863$$