

ФКН МНаД: ТВиМС 2026.

Лист задач для самостоятельного решения #11.

Проверка статистических гипотез. Часть II.

1. Фармацевтическая компания тестирует новое лекарство против стандартного протокола лечения. Необходимо проверить, имеет ли новое лекарство более высокую долю выздоровления.

Стандартное лечение (А): $n = 800$ пациентов, $\tilde{p}_A = 0.65$.

Новое лекарство (В): $m = 400$ пациентов, $\tilde{p}_B = 0.72$.

Гипотезы: $H_0 : p_A = p_B$ (новое лекарство не более эффективно) против $H_1 : p_A < p_B$ (новое лекарство имеет более высокую долю выздоровления). Предоставляют ли данные достаточные доказательства для заключения, что новое лекарство эффективнее стандартного протокола лечения? Выполните проверку гипотез на уровнях значимости 2%, 5%.

2. Были проведены два опроса в Москве и Твери. Из выборки 200 человек в Москве 125 были против курения в ресторанах. В Твери 52 из выборки 100 были против курения в ресторанах. Пусть p_1 и p_2 — истинные доли людей в Твери и Москве, выступающие против курения в ресторанах.

(а) Постройте 95% доверительный интервал для разности долей $p_1 - p_2$.

(б) На уровне значимости 5% проверьте нулевую гипотезу $H_0 : p_1 = p_2$ против $H_1 : p_2 \neq p_1$.

(с) На уровне значимости 2.5% проверьте нулевую гипотезу $H_0 : p_2 = 0.55$ против $H_1 : p_2 > 0.55$.

3. *Насколько помогают ремни безопасности?* Чтобы ответить на этот вопрос, было проведено исследование автомобилей, которые были оборудованы ремнями безопасности (поясные и плечевые ремни) и впоследствии попали в аварии. Случайная выборка из 10,000 пассажиров показала следующие показатели травматизма (восстановлено из U.S. *Department of Transportation*, 1981):

Тяжёлая или смертельная травма	Ремень безопасности надет		Всего
	Да	Нет	
Да	3	119	122
Нет	829	9049	9878
Всего	832	9168	10000

- (а) Как бы вы проверили положительный эффект использования ремней безопасности с помощью теста на разность долей? Сформулируйте H_0 словами и формализованно.
- (б) Выполните проверку гипотез при различных уровнях значимости $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$. Какое получилось P -значение в вашем выбранном тесте? Прокомментируйте результаты.
- (с) Постройте соответствующий доверительный интервал. Исследуйте поведение границ при различных уровнях доверия: 90%, 95%, 99%. Какие выводы можно сделать?

4. Супермаркет провёл исследование, чтобы выяснить, одинаковы ли средние недельные продажи шоколадных батончиков при использовании обычного расположения на полке и при использовании витрины в конце прохода (дисплейная выкладка). Сводка данных представлена в таблице:

	Размер выборки	Выборочное среднее	Выборочная дисперсия
Обычное расположение на полке	11	5.3	2.4
Витрина в конце прохода	10	7.2	2.8

Предполагая, что недельные продажи распределены нормально, аналитический отдел хочет определить, действительно ли средние недельные продажи при использовании витрины в конце прохода выше, чем при обычном расположении товаров на полке.

Можно пользоваться следующим разбиением на подзадачи, чтобы лучше разобраться в теме:

- Пусть первая выборка — это $\{X_1, \dots, X_{11}\}$, а вторая — $\{Y_1, \dots, Y_{10}\}$. Опишите распределения статистик $\bar{X}$, $\bar{Y}$ и $D = \bar{X} - \bar{Y}$ в этой задаче.
 - Сформулируйте нулевую и альтернативную гипотезы.
 - Опишите все случайные величины, необходимые для процесса тестирования, их свойства и распределения при нулевой гипотезе, когда мы уверены, что H_0 полностью верна.
 - Выполните проверку с помощью правильного *score* теста, т.е. путём преобразования $\bar{x} - \bar{y}$ в шкалу выбранного распределения. Используйте уровни значимости $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$.
 - Найдите границу критической области в оригинальной шкале и выполните проверку, используя предыдущие уровни значимости. Покажите, что результаты проверки в двух подходах идентичны. *В задачах на разность параметров это может быть скорее в качестве доп. пункта для проверки себя. Быстрее решать конечно же с помощью score.*
5. Данные в следующей таблице показывают количество ежедневных нарушений парковки в двух районах города. Идентификация дней неизвестна, и записи не обязательно были сделаны в одни и те же дни. Есть ли доказательства того, что районы имеют разные средние количества нарушений? Укажите необходимые предположения и выполните проверку гипотез на уровнях значимости $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$.

Район А	Район В
38	32
38	38
29	22
45	30
42	34
33	28
27	32
32	34
32	24
34	нет данных

6. *Тест на разность истинных математических ожиданий при известной дисперсии.*

Рассмотрим две независимые случайные выборки: $X_1, \dots, X_n$, где $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma^2)$, и $Y_1, \dots, Y_m$, где $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_y, 8\sigma^2)$. Известно, что $n = 5$, $m = 9$, $\bar{x} = 7$, $\bar{y} = 4$. Проверьте нулевую гипотезу $H_0 : \mu_x = \mu_y$ против односторонней альтернативы $H_1 : \mu_x > \mu_y$ на уровнях значимости 1%, 2%, 5%, если значение σ известно, $\sigma = 3$.

- Найдите распределения $\bar{X}$, $\bar{Y}$, и $D = \bar{X} - \bar{Y}$. Укажите их параметры.
- Найдите границу критической области в оригинальной шкале, используя условие на вероятность ошибки первого рода.
- Выполните проверку гипотез на известных реализациях выборок.
- Выполните проверку гипотез, используя правильный *score* теста, и убедитесь, что результаты проверки идентичны.